Helsingin yliopisto

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Pro gradu -tutkielma

Pseudodifferentiaalioperaattorit ja tarkka Gårdingin epäyhtälö

Kirjoittaja:
Janne Siipola

Ohjaajat:
Akatemiaprofessori Matti Lassas
Yliopistonlehtori Petri Ola

11. huhtikuuta 2019

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

TiedekuntaOsasto — FakultetSektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Tekijä — Författare — Author

Janne Siipola

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Pseudodifferentiaalioperaattorit ja tarkka Gårdingin epäyhtälö

Oppiaine — Läroämne — Subject

Soveltava matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Huhtikuu 2019	89 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työssä on kaksi keskeistä teemaa: esitellä pseudodifferentiaalioperaattoreiden teoriaa ja todistaa tarkka Gårdingin epäyhtälö. Työhön on valittu erityisesti sellaisia pseudodifferentiaalioperaattoreihin liittyviä tuloksia, jotka tukevat tarkan Gårdingin epäyhtälön todistamista.

Luvussa kaksi määritellään symboli ja esitetään kuinka symboli määrää pseudodifferentiaalioperaattorin. Lisäksi luvussa tarkastellaan pseudodifferentiaalioperaattoreiden ja lineaaristen osittaisdifferentiaalioperaattoreiden välistä yhteyttä. Luvun lopussa esitellään tulos, jonka mukaan pseudodifferentiaalioperaattori kuvaa Schwartz-avaruuden itselleen.

Luku kolme aloitetaan määrittelemällä asymptoottinen kehitelmä. Luvussa osoitetaan teorian kaksi perustulosta: kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulo ja pseudodifferentiaalioperaattorin adjungaatti ovat pseudodifferentiaalioperaattoreita. Näihin kahteen perustulokseen sisältyy myöskin tieto siitä, mihin symboliluokkaan tulo-operaattorin ja adjungaatin symboli kuuluvat ja niiden symboleille esitetään asymptoottiset kehitelmät.

Luvussa neljä esitellään ja todistetaan Gårdingin epäyhtälö ja tarkka Gårdingin epäyhtälö. Luvussa laajennetaan tietoja pseudodifferentiaalioperaattoreista siinä määrin kuin on välttämätöntä Gårdingin epäyhtälöiden todistamiseksi. Yksi merkittävä pseudodifferentiaalioperaattoreihin liittyvä tulos, joka todistetaan luvussa 4, sanoo, että luokan $\mathcal{S}^0$ pseudodifferentiaalioperaattori kuvaan L^2-avaruuden itselleen. Tästä syystä luvun ensimmäinen kappale on nimetty L^2-teoriaksi. Luvussa sivutaan myös Sobolev-avaruuksien teoriaa, sillä se on kytköksissä Gårdingin epäyhtälöihin.

Viidennessä luvussa tarkastellaan evoluutioyhtälöä. Päämääränä on antaa esimerkki tarkan Gårdingin epäyhtälön soveltamisesta. Tämä esimerkki on tulos, jonka mukaan kyseisen evoluutioyhtälön ratkaisulle on olemassa aikaestimaatti. Tarkastelun kohteena oleva evoluutioyhtälö määritellään pseudodifferentiaalioperaattorin avulla.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Fourier-analyysi, distribuutioteoria, pseudodifferentiaalioperaattorit

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto, Hämäläis-Osakunnan kirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto **2**

2 Pseudodifferentiaalioperaattorit **5**
2.1 Symboliluokat 5

3 Asymptoottiset kehitelmät **13**
3.1 Kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulo 13
3.2 Adjungaatti 26

4 L^2-teoria ja tarkka Gårdingin epäyhtälö **41**
4.1 L^2-teoria 41
4.2 Gårdingin epäyhtälö 52
4.3 Tarkka Gårdingin epäyhtälö 55

5 Evoluutioyhtälö **82**

A Käytetyt merkinnät **87**

Kirjallisuutta **88**

Luku 1

Johdanto

Matematiikka kehittyi valtaisasti 1900 luvulla. Kun Henri Lebesque esitteli maailmalle vuosisadan alussa vuonna 1902 väitöskirjansa nimellä "Intégrale, longueur, aire" oli matematiikka astumassa uuteen kauteen.

Kahdella edellisellä vuosisadalla oli matemaattinen analyysi kehittynyt erottamattomana osana fysiikkaa. Tästä hyvänä esimerkkinä toimii Jean-Baptiste Joseph Fourierin kehittämä ja nimeä kantama Fourier'n muunnos. Joseph Fourier, joka syntyi 1768 ja kuoli 1830, kiinnostui lämmöstä osallistuttuaan Napoleonin Egyptin sotaretkelle 1798. Lämpöä tutkiessaan Fourier törmäsi osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja hänen onnistui kehittää nerokas keino ratkaista näitä yhtälöitä. Tuon menetelmän nimi on Fourier'n muunnos. Menetelmän nerokkuus on siinä, että hankalasti ymmärrettävä differentiaaliyhtälö voidaan muunnoksen avulla muuttaa polynomiyhtälöksi, jonka ratkaiseminen voi olla helpompaa.

Fourierin tapa ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ei kuitenkaan herättänyt luottamusta kaikissa sen ajan matemaatikoissa. Ongelmana oli se, että vaikka muunnos näytti toimivan hyvin, niin sillä ei ollut pitävää teoreettista pohjaa. Vakaa teoreettinen perusta Fourier-muunnoksen teorialle kehittyi Lebesquen mitta- ja integrointiteorian tarjoamasta suunnasta.

Paitsi Fourier, myös muut matemaatikot olivat kehitelleet ennen 1900-lukua differentiaaliyhtälöiden ratkaisutapoja, jotka perustuivat integroimiseen. 1900-luvulla tämä kehityspolku johti distribuutioteorian syntymiseen. Distribuutioteorian avulla osittaisdifferentiaaliyhtälöihin voidaan etsiä ratkaisuja sellaisten funktioiden joukosta, jotka eivät ole derivoituvia tai edes jatkuvia. Tarkkaan ottaen tälläiset ratkaisut eivät ole funktioita vaan niitä kutsutaan yleistetyiksi funktioiksi siis distribuutioiksi.

Ideana on, että alkuperäisen yhtälön sijaan ratkaisua etsitään integroimalla yhtälöä testifunktioita vasten. Näin derivointi siirtyy testifunktioille, jotka ovat sileitä ja käyttäytyvät siten hyvin derivoinnin suhteen. Teorian avulla löydettyjä ratkaisuja kutsutaan heikoiksi ratkaisuiksi erotuksena niin sanotuista klassisista ratkaisuista. Distribuutioteorian kannalta merkittäviä tutkijoita olivat ainakin Sergei Lvovich Sobolev ja Laurent Schwartz. Tästä osoituksena, heidän nimensä esiintyy tämänkin pro-gradu työn tekstissä Sobolev-avaruuden ja Schwartz-avaruuden nimissä.

Tämän pro-gradu työn kantavana teemana toimii pseudodifferentiaalioperaattorit. Ne aloittavat luvun 2 ja ovat mukana työn loppuun saakka. Pseudodifferentiaalioperaattoreiden teoria alkoi kehittyä 1950-luvulta eteenpäin ja se liittyy edellä mainittuihin Fourier-muunnoksen ja distribuutioteorian käsitteisiin.

Fourier-muunnoksen avulla voidaan käsitellä lineaarista osittaisdifferentiaali seuraavalla tavalla. Ajatellaan differentiaaliyhtälöä $P(D)u(x) = f(x)$, jossa lineaarinen differentiaalioperaattori $P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ operoi formaalisti funktioon $u(x)$ ja tuloksena on funktio $f(x)$. Kun tästä yhtälössä otetaan Fourier'n muunnos niin päädytään tilanteeseen, jossa differentiaalioperaattorin osittaisderivaatat muuttuvat Fourier'n kertoimiksi, siis $P(\xi)\widehat{u(\xi)} = \widehat{f}(\xi)$. Jakamalla polynomi $P(\xi)$ yhtälön toiselle puolelle saadaan $\widehat{u}(\xi) = 1/(\widehat{P}(\xi))\widehat{f}(\xi)$ ja ottamalla käänteinen Fourier-muunnos päädytään tilanteeseen, jossa olemme löytäneet ratkaisun alkuperäiselle differentiaaliyhtälölle, nimittäin

$$u(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \cdot 1/(\widehat{P}(\xi))\widehat{f}(\xi)d\xi. \tag{1.1}$$

Kun $P(D)$ on lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori, niin $P(\xi)$ on polynomi. Luonnollisesti edellä olleessa päättelyssä on pidettävä huoli siitä, että f:n ja u:n Fourier-muunnokset ovat mielekkäitä. Toinen tärkeä kysymys on symbolin $P(\xi)$ mahdolliset nollakohdat.

Mutta mikäpä estäisi ajattelematta asiaa niin, että $P(\xi)$ olisikin jotain muuta kuin polynomi? Juuri tästä on kyse pseudodifferentiaalioperaattoreissa. Seuraavassa luvussa määritellään minkälainen symbolin $\frac{1}{\widehat{P}(\xi)}$ tulee olla, jotta kaavassa (1.1) olisi pseudodifferentiaalioperaattori. Samassa luvussa luonnollisesti määritellään tarkasti pseudodifferentiaalioperaattori ja käydään läpi muutama esimerkki.

Luvussa kolme osoitetaan, että kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulo ja pseudodifferentiaalioperaattorin adjungaatti ovat pseudodifferentiaalioperaattoreita. Lisäksi pseudodifferentiaalioperaattoreiden tulolle ja adjungaatille esitetään ja todistetaan tärkeät tulokset, joiden mukaan niiden symbolit voidaan esittää tietynlaisina asymptoottisina kehitelminä.

Neljännen luvun päätuloksia ovat Gårdingin epäyhtälö ja tarkka Gårdingin epäyhtälö, jotka ovat tärkeitä tuloksia ainakin teoreettisissa fysiikassa. Tässä luvussa laajennetaan tietoja pseudodifferentiaalioperaattoreista ja esitetään lukuisia tuloksia niihin liittyen. Luvussa esitettävät tulokset on valittu siten, että ne tukevat Gårdingin epäyhtälöiden todistamista. Yksi merkittävä pseudodifferentiaalioperaattoreihin liittyvä tulos, joka todistetaan luvussa 4, sanoo, että tietynlainen pseudodifferentiaalioperaattori kuvaan L^2

funktiot L^2 funktioiksi. Tästä syystä luvun ensimmäinen kappale on nimetty L^2-teoriaksi. Luvussa keskustellaan myös Sobolev-avaruuksista.

Viidennessä luvussa tarkastellaan evoluutioyhtälöä. Tarkastelun kohteena oleva evoluutioyhtälö määritellään pseudodifferentiaalioperaattorin avulla. Luvussa esitetään tulos, jonka mukaan evoluutioyhtälön ratkaisulle on olemassa aikaestimaatti. Aikaestimaatin määrittämisessä sovelletaan tarkkaa Gårding epäyhtälöä.

Mikäli lukija on etsii hyvää kirjaa, jonka avulla voisi tutustua edellä mainittuihin matematiikan käsitteisiin, niin kannattaa tutustua Robert Strichartzin kirjoittamaan kirjaan "A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms" [20]. Kirja sisältää myös lyhyen kappalleen pseudodifferentiaalioperaattoreista. Kirja sopii oikein hyvin henkilölle, jolla on kandidaatin tason tiedot matemaattisesta analyysistä. Kirjassa ei anneta täsmällisiä todistuksia esitetyille tuloksille vaan keskittyy motivoimaan ja luomaan kuvaa siitä miten ja miksi nämä asiat nivoutuvat yhteen.

Luku 2

Pseudodifferentiaalioperaattorit

Johdantoluvussa tarkasteltiin jo hieman sitä miten pseudodifferentiaalioperaattori määritellään. Tässä luvussa esitellään pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmä siten kuin se on esitetty M.W. Wongin kirjassa An Introduction to pseudo-differential operators [27]. Tämä ja seuraava luku pohjautuvat tähän kirjaan. Mikäli lukija haluaa perusteellisen katsauksen pseudodifferentiaalioperaattoreista, niin kannattaa aloittaa esimerkiksi tästä M.W. Wongin kirjasta. Sen jälkeen voi kenties jatkaa Francois Trevesin kirjalla Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators [23] tai Gerd Grubbin kirjalla Distributions and Operators [6].

2.1 Symboliluokat

Pseudodifferentiaalioperaattori on läheistä sukua lineaariselle differentiaalioperaattorille, kuten nimestäkin voinee päätellä. Tarkastellaan seuraavaksi operaattoreiden yhteyttä tarkemmin. Olkoon $p(x, D)$ lineaarinen differentiaalioperaattori ja olkoon $u(x)$ Schwartzin funktio, eli funktio jonka kaikki derivaatat ovat sileitä funktioita ja jonka kaikki derivaatat suppenevat nollaan, kun $x \to \infty$, nopeammin kuin mikään muuttujasta x muodostettu rationaalifunktio $\frac{1}{R(x)}$, missä $R(x)$ on polynomi. Toisinaan tästä funktioluokasta käytetään nimitystä nopeasti vähenevät funktiot. Schwartz-avaruutta merkitsemme symbolilla $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Operaattorilla $p(x, D)$ on luonnollisesti seuraavanlainen esitys

$$\big(p(x, D)u\big)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\big(D^\alpha u\big)(x), \tag{2.1}$$

missä α on multi-indeksi ja D on hieman muokattu versio tavanomaisesta osittaisderivaatasta eli $D = -i\partial$. Kertoimista $a_\alpha(x)$ oletetaan että $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja että kaikkien kertaluokkien osittaisderivaatat ovat rajoitettuja. Multi-indeksinotaatiosta voi ottaa selvää esimerkiksi Evansin kirjan [2] liitteestä tai Wongin kirjan [27] alkuosiosta. Operaattori koostuu siis multi-indeksin mukaisesta osittaisderivoinnista ja kertomisesta kertoimella $a_\alpha(x)$, joka ei ole vakio vaan riippuu muuttujasta x. Mielenkiintoinen seikka on, että tälle operaattorille voidaan antaa toisenlainen esitys Fourier'n muunnoksen avulla. Katsotaan seuraavaa päättelyketjua

$$\begin{aligned}
\big(p(x,D)u\big)(x) &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\big(D^\alpha u\big)(x) \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\big(D^\alpha u\big)(x) \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\mathscr{F}^{-1}\big(\xi^\alpha \widehat{u}\big)(x) \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Yllä olevassa päättelyssä $\mathscr{F}$ ilmaisee Fourier'n muunnosta, $\mathscr{F}^{-1}$ käänteis-Fourier'n muunnosta ja ξ on Fourier-avaruuden muuttuja. Määritellään että

$$p(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{2.2}$$

Tällöin saadaan

$$\big(p(x,D)u\big)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi. \tag{2.3}$$

Mikäli lukija on kiinnostunut saamaan lisätietoa Fourier-muunnoksesta, niin lähteiden [27], [19] ja [18] tarkastelemisesta voi olla hyötyä. Tämä päättelyketju antaa sen tuloksen, että lineaarisella differentiaalioperaattorilla on toinenkin esitystapa. Nimittäin

$$\big(p(x,D)u\big)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \tag{2.4}$$

missä funktiota $p(x,\xi)$ kutsutaan operaattorin symboliksi. Tässä tapauksessa symboli on polynomi ξ muuttujan suhteen, mikä on seurausta Fourier-muunnoksen ominaisuuksista. Jos muuttujan x suhteen muuttuvat kertoimetkin, siis $a_\alpha(x)$, ovat polynomeja, niin symboli $p(x,\xi)$ on polynomi. Olennaista on symbolin käytös muuttujan ξ suhteen.

Nimittäin, se mikä tekee pseudodifferentiaalioperaattorin eron lineaariseen differentiaalioperaattoriin nähden on se, että kaavassa (2.4) luovutaan symbolin $p(x, \xi)$ polynomiehdosta. Jos $p(x, \xi)$ on ylipäätään jokin funktio, joka ei ole polynomi, niin kaavassa (2.4) on edelleen mielekäs määritelmä operaattorille. Mutta mikäli symboli ei ole polynomi, niin päättelyketjussa ei voida enää kulkea taaksepäin ja esittää tätä uutta operaattoria kaavan (2.1) avulla. Tälläinen yhteys on pseudodifferentiaalioperaattorin ja lineaarisen differentiaalioperaattorin välillä.

Kun luovutaan vaatimuksesta että symboli on polynomi, hyväksytäänkö nyt symboliksi mitä tahansa funktioita? Ei varsinaisesti. Edelleen vaaditaan, että symboli on sileä funktio. Lisäksi symboleita luokitellaan sen mukaan miten nopeasti niiden osittaisderivaatat kasvavat. Pseudodifferentiaalioperaattorin symbolin määritelmä on seuraava:

Määritelmä 2.1.1 (Symboli)**.** Olkoon $m \in \mathbb{R}$. Symboliluokka S^m sisältää kaikki sellaiset funktiot $p(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ joilla on olemassa vakio $C_{\alpha,\beta}$ kaikilla multi-indekseillä α ja β siten, että

$$\left|\left(D_x^\alpha D_\xi^\beta p\right)(x, \xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}, \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Funktiota $p(x, \xi) \in S^m$ kutsutaan symboliksi. Tässä gradussa symboliluokan notaatio saattaa vaihdella ja ainakin seuraavia vaihtoehtoisia merkitätapoja saattaa esiintyä: $S^m_{1,0}$, $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Otetaan jatkossa huomioon seuraava merkintätapa.

Notaatio 2.1.2. Symbolin $p \in S^m$ osittaisderivaattaa voidaan merkitä seuraavasti:

$$\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) = p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi). \tag{2.6}$$

Symboliluokan vaihtoehtoiset merkintätavat kumpuavat siitä tosiasiasta, että on olemassa useita tapoja määritellä symboliluokka. Yksi mahdollinen tapa määritellä symboliluokka on peräisin Lars Hörmanderilta. Hän muokkasi luokkaa määrittävän ehdon (2.5) seuraavaksi,

$$\left|\left(D_x^\alpha D_\xi^\beta p\right)(x, \xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}, \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

missä $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Hörmander merkitsi tälläisen ehdon toteuttavaa symboliluokkaa tunnuksella $S^m_{\rho,\delta}$. Esimerkiksi Hitoshi Kumano-gon kirjassa Pseudo-Differential Operators [13] käytetään alusta lähtien tälläistä tapaa määritellä symboliluokat. Tästä vaihtoehdosta juontaa juurensa määritelmässä 2.1.1 esiintyvät merkintätavat, kun valitaan $\rho = 1$ ja $\delta = 0$. Olennainen ero näiden kahden määrittelytavan välillä on se, että ensimmäinen ei ota lainkaan huomioon x muuttujan osittaisderivointia. Tässä huomautuksesta huolimatta tässä pro-gradu työssä rajoitutaan tarkastelemaan ainoastaan määritelmän 2.1.1 mukaisia symboliluokkia.

Nyt kun symbolin määritelmä on selvä, niin voidaan määritellä pseudodifferentiaalioperaattori.

Määritelmä 2.1.3 (Pseudodifferentiaalioperaattori)**.** Olkoon p symboli ja olkoon $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin symboliin $p(x,\xi)$ liittyvä pseudodifferentiaalioperaattori T_p on

$$\big(T_p\varphi\big)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi. \tag{2.8}$$

Pseudodiffentiaalioperaattorin määritelmässä 2.1.3 integraali (2.8) suppenee, sillä symboli $p(x,\xi)$ kasvaa korkeintaan polynomiaalista vauhtia muuttujan ξ suhteen ja Schwartzin funktio $\widehat{\varphi}$ suppenee nollaan äärettömyydessä nopeampaa vauhtia kuin mikään polynomi kasvaa äärettömyydessä. Annetaan pseudodifferentiaalioperaattorin merkintään liittyvä huomautus.

Huomautus 2.9 (Pseudodifferentiaalioperaattorin merkinnästä)*.* Määritelmässä 2.1.3 annettua pseudodifferentiaalioperaattoria T_p merkitään tässä gradussa myös seuraavilla tavoilla, $p(x,D)$ ja $p(X,D)$. Näissä merkitätavoissa on ehkä se etu, ettei niissä sotketa mukaan kirjainta T, vaan operaattoria merkitään sitä vastaavan symbolin kirjaintunnuksella. Symboli ja operaattori erotetaan toisistaan muuttamalla symbolin muuttuja ξ kirjaimeksi D ja joskus lisäksi muutetaan symbolin muuttuja x isoksi kirjaimeksi X. Tässä merkintätavassa on kuitenkin se haittapuoli, ettei operaattoria ja sen määrittävää symbolia ole ehkä niin helppoa erottaa toisistaan.

Annetaan vielä toinenkin huomautus liittyen pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmään.

Huomautus 2.10 (Operaattoriluokka)*.* Tässä gradussa saatetaan joskus mainita operaattoriin liittyvä operaattoriluokka. Symboliluokka määrää vastaavan operaattoriluokan.

Täsmällisesti määriteltynä operaattoriluokka määritellään seuraavasti:

Määritelmä 2.1.4 (Pseudodifferentiaalioperaattorin luokka)**.** Pseudodifferentiaalioperaattori T_p kuuluu pseudodifferentiaalioperaattoreiden luokkaan $\mathbf{S}^m$, mikäli sen symboli $p(x,\xi)$ kuuluu symboliluokkaan S^m.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamaa esimerkkiä liittyen symbolin ja pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmiin. Aloitetaan jo esillä olleella lineaarisella differentiaalioperaattorilla. Esimerkissä näytetään, että ne kuuluvat pseudodifferentiaalioperaattoreihin.

Esimerkki 2.11. Olkoon $p(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jos kaikki kertoimet $a_\alpha(x)$ ovat sileitä eli C^∞-funktioita ja kertoimien kaikkien kertaluokkien derivaatat ovat rajoitettuja $\mathbb{R}^n$:ssä, niin tällöin $p(x,\xi) =$

$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ kuuluu symboliluokkaan S^m ja näin ollen $p(x,D)$ on pseudodifferentiaalioperaattori.

Todistus. Olkoot γ ja δ multi-indeksejä. Tällöin

$$\big|\big(D_x^\gamma D_\xi^\delta p\big)(x,\xi)\big| \leq \sum_{|\alpha|\leq m} C_{\alpha,\gamma}|\partial_\xi^\delta \xi^\alpha| \tag{2.12}$$

kaikilla $x,\xi \in \mathbb{R}^n$, missä $C_{\alpha,\gamma} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big|\big(D^\gamma a_\alpha\big)(x)\big|$. Edellisessä kaavassa olevalle derivaatalle voidaan osoittaa että

$$\partial_\xi^\delta \xi^\alpha = \begin{cases} \delta!\binom{\alpha}{\delta}\xi^{\alpha-\delta}, & \delta \leq \alpha, \\ 0, & \text{muutoin}, \end{cases} \tag{2.13}$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen saadaan

$$\big|\big(D_x^\gamma D_\xi^\delta p\big)(x,\xi)\big| \leq \sum_{|\alpha|\leq m} C_{\alpha,\gamma}\delta!\binom{\alpha}{\delta}|\xi|^{|\alpha|-|\delta|} \leq C'_{\alpha,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\delta|}$$

kaikilla $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. Symboli $p(x,\xi)$ toteuttaa siten määritelmän 2.1.1 ehdon ja operaattori on luokan S^m pseudodifferentiaalioperaattori. Esimerkki osoittaa, että lineaarisen osittaisdifferentiaalioperaattorin kertaluokka määrittää mihin pseudodifferentiaaliluokkaan operaattori kuuluu, kun se tulkitaan pseudodifferentiaalioperaattorina.

□

Toisessa esimerkissä osoitetaan, että seuraavaksi määriteltävä funktio on symboli. Tämä symboli tulee vielä uudestaan esille luvussa 4, joten myös siksi on hyvä nostaa se esille tässä vaiheessa.

Määritelmä 2.1.5. Määritellään kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$ ja $m \in \mathbb{R}$ että

$$\langle\xi\rangle^m = (1+|\xi|^2)^{m/2}. \tag{2.14}$$

Näytetään esimerkki koskien määritelmän 2.1.5 funktiota.

Esimerkki 2.15. Funktiolle $\langle\xi\rangle^m$ pätee $\langle\xi\rangle \in S^m$, eli $\langle\xi\rangle^m$ on symboli.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multi-indeksi. Voidaan osoittaa induktiolla, että funktion $\langle\xi\rangle^m$ osittaisderivaatta saadaan äärellisenä summana, joka on muotoa:

$$\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^m = \sum_{k',k} P_{k'}(\xi)(1+|\xi|^2)^{m/2-k}.$$

Funktio $P_{k'}(\xi)$ on korkeintaan astetta k' oleva polynomi termeistä ξ_j, missä $j = 1, \cdots, n$. Luvuille k ja k' pätee: $k \geq k' \geq 0$, $2k - k' \geq |\alpha|$ ja $\frac{|\alpha|}{2} \leq k \leq |\alpha|$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^m| &\leq \sum_{k',k} C_{k'}(1+|\xi|)^{k'}(1+|\xi|^2)^{m/2-k} \leq \sum_{k',k} C_{k'}(1+|\xi|^2)^{m-(2k-k')} \\ &\leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Näin ollen $\langle\xi\rangle^m$ todellakin on luokan S^m symboli.

Lisäksi voidaan huomata, että tämän symbolin määräämällä pseudodifferentiaalioperaattorilla on olemassa vastine tavanomaisena differentiaalioperaattorina, mikäli m on parillinen ja positiivinen kokonaisluku. Tällöin $T_{\langle\xi\rangle^m} = (I - \Delta)^{m/2}$, missä I on ns. identiteettioperaattori ja $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ on Laplace-operaattori. Symbolista $\langle\xi\rangle^m$ ja sen määräämästä pseudodifferentiaalioperaattorista keskustellaan lisää kappaleessa 4.1.

Fourier-muunnokselle on olemassa tulos, jonka mukaan nopeasti vähenevän funktion Fourier-muunnos on edelleen nopeasti vähenevä funktio. Tämä on todistettu esimerkiksi M.W. Wongin kirjassa [27]. Todistetaan vastaava tulos pseudodifferentiaalioperaattoreille.

Lause 2.1.6. Olkoon $p(x,\xi)$ symboli. Pseudodifferentiaalioperaattorille $p(x,D)$ pätee

$$p(x,D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.16}$$

Todistus. Väite on totta, jos voidaan osoittaa, että $\big(p(x,D)u\big)(x) \in C^\infty$, ja että kaikilla multi-indekseillä α ja β pätee

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| x^\alpha \partial^\beta \big(p(x,D)u\big)(x)\Big| < \infty. \tag{2.17}$$

Olkoon $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Muistetaan, että kun $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, niin myös $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmän mukaan

$$\big(p(x,D)u\big)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Koska $p(x,\xi)$ on symboli, niin $p \in S^m_{1,0}$ jollakin $m \in \mathbb{R}$ ja tiedämme että

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{2.18}$$

Osoitetaan ensin että $p(x,D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tämän osoittamiseksi on näytettävä, että $\partial_x^\beta\big(p(x,D)u\big)(x)$ on olemassa ja on jatkuva millä tahansa multi-indeksin β arvolla. Olkoon siis β mielivaltainen multi-indeksi ja osittaisderivoidaan funktiota $\big(p(x,D)u\big)(x)$ sen mukaisesti. Tiedetään että $e^{ix\cdot\xi}$, $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja että $\widehat{u}(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, jolloin voidaan käyttää dominoidun konvergenssin lausetta [9] tilanteessa

$$\partial_x^\beta p(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\partial_x^\beta \int_{\mathbb{R}^n} \big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi.$$

Dominoidun konvergenssin lauseen perusteella tiedetään, että $\partial_x^\beta\big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)$ on integroituva ja

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\partial_x^\beta \int_{\mathbb{R}^n} \big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\beta\big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi.$$

Olkoon $|x_0 - x| < \delta$, missä $\delta > 0$ on pieni luku. Käytetään hyväksi tietoa, että $\partial_x^\beta\big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big) \in C(\mathbb{R}^n)$. Voidaan päätellä, että on olemassa vakio $C' > 0$ siten, että

$$\begin{aligned}
&\big|\partial_x^\beta p(x,D)u(x_0) - \partial_x^\beta p(x,D)u(x)\big| \\
&\quad = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\beta\big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\beta\big(e^{ix_0\cdot\xi}p(x_0,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi\Big| \\
&\quad \le \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\partial_x^\beta\big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big) - \partial_x^\beta\big(e^{ix_0\cdot\xi}p(x_0,\xi)\big)\Big||\widehat{u}(\xi)|d\xi \\
&\quad \le C|x - x_0|\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|d\xi \le C'|x - x_0|.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa, että $\partial_x^\beta\big(p(x,D)u\big)(x)$ on jatkuva funktio. Koska β on mielivaltainen multi-indeksi, niin voidaan edelleen päätellä, että $p(x,D)u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen ensimmäinen ehto Schwartz-avaruuteen kuulumisesta täyttyy. Siirrytään eteenpäin tarkastelemaan ehtoa (2.17).

Osittaisintegroinnin ja Leibnitzin kaavan nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
x^\alpha\big(D^\beta\big(p(x,D)u(x)\big)\big) &= x^\alpha(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta\big(e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi \\
&= x^\alpha(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\xi^\gamma e^{ix\cdot\xi}\big(D_x^{\beta-\gamma}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\xi^\gamma D_\xi^\alpha e^{ix\cdot\xi}\big(D_x^{\beta-\gamma}p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

$$
(2.19) \qquad = (2\pi)^{-n/2}(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta}e^{ix\cdot\xi}\big(D_\xi^{\alpha-\delta}D_x^{\beta-\gamma} p(x,\xi)\big)D_\xi^{\delta}\big(\xi^\gamma\widehat{u}(\xi)\big)d\xi.
$$

Yllä olevassa päättelyssä voidaan soveltaa osittaisintegrointia, koska $\widehat{u}(\xi)$ on Schwartzin funktio. Käyttämällä tietoa $p(x,\xi)\in S^m$ saadaan estimaatti

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big|x^\alpha\big(D^\beta\big(p(x,D)u(x)\big)\big| \\
&\quad\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}\sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\big|\big(D_\xi^{\alpha-\delta}D_x^{\beta-\gamma}p(x,\xi)\big)\big|\big|D_\xi^{\delta}\big(\xi^\gamma\widehat{u}(\xi)\big)\big|d\xi \\
&\quad\leq (2\pi)^{-n/2}\sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\delta|}\big|D_\xi^{\delta}\big(\xi^\gamma\widehat{u}(\xi)\big)\big|d\xi.
\end{aligned}
$$

Yllä oleva integraali suppenee, koska $\widehat{u}(\xi)$ on Schwartzin funktio. Näin ollen saadaan

$$
(2.20) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big|x^\alpha\big(D^\beta\big(p(x,D)u(x)\big)\big| < \infty.
$$

□

On olemassa myös toinen tapa määritellä pseudodifferentiaalioperaattori. Tämä toinen määrittely juontaa juurensa Hermann Weylin vuonna 1931 julkaisemaan kirjaan Gruppentheorie und Quantenmechanik [26] ja siitä käynnistyneeseen tutkimukseen. Hörmander esitteli keväällä 1979 artikkelissaan [12] operaattorikalkyylin, jota kutsui pseudodifferentiaalioperaattoreiden Weyl-kalkyyliksi. Weyl-kalkyyliin voi tutustua esimerkiksi perehtymällä Gerald B. Follandin kirjaan [4]. Tässä pro-gradu työssä ei kuitenkaan tulla käsittelemään Weyl-kalkyyliä.

Nimekkäimmät tutkijat pseudodifferentiaalioperaattoreiden parissa olivat Kohn ja Nirenberg (New York) sekä Hörmander (Lund). Lisäksi täytyy mainita Mihlin, Calderon ja Zygmund, jotka olivat ensimmäisten joukossa tutkimassa singulaarisia integraalioperaattoreita.

Luku 3

Asymptoottiset kehitelmät

3.1 Kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulo

Kappaleessa 3.1 todistetaan, että kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulo on pseudodifferentiaalioperaattori ja todistetaan tähän tulo-operaattoriin liittyvä asymptoottinen kehitelmä. Luku 3 perustuu M.W. Wongin kirjaan [27] ja tässä esitetyt lauseet löytää todistuksineen myös sieltä.

Asymptoottinen kehitelmä on melko abstrakti käsite. Erityisen abstraktin siitä tekee se, että kehitelmä määritellään summana, joka ei välttämättä suppene missään pisteessä. Suppenemisella ei kuitenkaan ole väliä. Olennaista on, että summan osasummien ja "jäännöstermin"on kuuluttava tiettyyn symboliluokkaan. Kehitelmän auttaa pseudodifferentiaalioperaattoreihin liittyvää laskentaa, kuten luvuissa 4 ja 5 tullaan näkemään, joten määritelmä on ainakin hyödyllinen. Aloitetaan luku määrittelemällä asymptoottinen kehitelmä.

Määritelmä 3.1. (Asymptoottinen kehitelmä) Olkoon $\sigma \in S^m$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa symbolit $\sigma_j \in S^{m_j}$, missä

$$m = m_0 > m_1 > m_2 > \cdots > m_j \to -\infty, \quad j \to \infty,$$

siten, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvulla N

$$\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \in S^{m_N}. \tag{3.2}$$

Tällöin summaa $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$ kutsutaan symbolin σ asymptoottiseksi kehitelmäksi ja kirjoitetaan

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j.$$

Jatketaan esittelemällä ykkösen ositus, jota tarvitaan jatkossa.

Lemma 3.1.1. (Ykkösen ositus) On olemassa jono funktioita $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ avaruudessa C_0^{∞} siten, että

(i) $0 \leq \varphi_k(\xi) \leq 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad$ kaikilla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$,

(iii) kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$, vähintään yksi ja korkeintaan kolme funktioista φ_k on erisuuri kuin nolla,

(iv) $\mathrm{supp}(\varphi_0) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \,:\, |\xi| \leq 2\}$,

(v) $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \,:\, 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}, \quad$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$,

(vi) Jokaisella multi-indeksin α arvolla on olemassa vakio $A_\alpha > 0$ siten että

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \varphi_k)(\xi)| \leq A_\alpha 2^{-k|\alpha|}, \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan. Todistus löytyy Wongin kirjasta [27] kappaleesta 6. □

Esitellään nyt tulo-operaattoreihin liittyvä lause, joka sanoo, että kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulo on pseudodifferentiaalioperaattori ja että tulo-operaattorin symboli voidaan määritellä asymptoottisena kehitelmänä tulon tekijöiden symboleista. Lause kuuluu teorian perustuloksiin ja on erittäin tärkeä lukujen 4 ja 5 kannalta.

Lause 3.1.2. Olkoon $\sigma \in S_{1,0}^{m_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ja $\tau \in S_{1,0}^{m_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Tällöin kahden pseudodifferentiaalioperaattorin T_σ ja T_τ tulo $T_\sigma T_\tau$ on pseudodifferentiaalioperaattori T_λ, missä $\lambda \in S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ja symbolilla λ on kehitelmä

$$\lambda \sim \sum_{|\mu| \geq 0} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \Big(\partial_\xi^\mu \sigma\Big) \Big(\partial_x^\mu \tau\Big), \tag{3.3}$$

missä (3.3) tarkoittaa, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla N

$$\lambda - \sum_{0 \leq |\mu| \leq N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \Big(\partial_\xi^\mu \sigma\Big) \Big(\partial_x^\mu \tau\Big)$$

on symboli joka kuuluu luokkaan $S^{m_1+m_2-N}$.

Ei todisteta suoraan lausetta 3.1.2, vaan pilkotaan lauseen todistus pienempiin paloihin. Katsotaan seuraavaksi mikä on pseudodifferentiaalioperaattorin ydin. Olkoon $p \in S^m$, missä $m \in \mathbb{R}$, ja $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmästä seuraa, että

$$
\begin{aligned}
p(x,D)u(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi \\
&= \int (2\pi)^{-n/2} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)d\xi u(y)dy.
\end{aligned}
$$

Kun määritellään

$$
K(x, x-y) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)d\xi,
$$

niin $K(x, x-y)$ on pseudodifferentiaalioperaattorin $p(x,D)$ ydin ja

$$
p(x,D)u(x) = \int K(x, x-y)u(y)dy. \tag{3.4}
$$

Annetaan ytimelle täsmällinen määritelmä.

Määritelmä 3.1.3. Olkoon $\sigma \in S^m$. Tällöin pseudodifferentiaalioperaattorin $\sigma(x,D)$ ydin on

$$
K(x, x-y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma(x,\xi)d\xi. \tag{3.5}
$$

Tähän liittyen saadaan korollaari:

Korollaari 3.6. *Määritelmän 3.1.3 mukaan määritelty pseudodifferentiaalioperaattorin $p(x,D)$ ydin K on temperoitu distribuutio eli $K : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Todistus. Lauseen 2.1.6 nojalla väite pätee.

□

Osoitetaan seuraavaksi lemma, joka osoittaa minkälainen tulo-operaattorin symboli on.

Lemma 3.1.4. Lauseen 3.1.2 tulo-operaattorin $T_\sigma T_\tau$ symboli on

$$
\lambda(x,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x,\eta) \tag{3.7}
$$

kaikilla $x, \eta \in \mathbb{R}^n$, missä

$$
\lambda_k(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z)\tau(x-z,\eta)dz \tag{3.8}
$$

kaikilla $x, \eta \in \mathbb{R}^n$. Kaavassa (3.8) termi K_k on symbolin σ_k ydin, missä σ_k saadaan symbolista σ ykkösen osituksella.

Todistus. Sovelletaan ykkösen ositusta (3.1.1) symboliin σ. Olkoon $\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}, \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ ykkösen ositus. Tällöin saadaan

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(x,\xi)\varphi_k(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x,\xi). \tag{3.9}$$

Olkoon $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin symboli σ_k määrittelee operaattorin

$$\big(T_{\sigma_k}\phi\big)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi)\widehat{\phi}(\xi)\, d\xi.$$

Koska $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, niin monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \Big(T_{\sigma_k}\phi\Big)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x,\xi) \right) \widehat{\phi}(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma(x,\xi)\widehat{\phi}(\xi)\, d\xi = \Big(T_\sigma\phi\Big)(x).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$T_\sigma\phi = \sum_{k=0}^{\infty} T_{\sigma_k}\phi. \tag{3.10}$$

Voidaan osoittaa, että sarjan suppeneminen on sekä tasaista että absoluuttista. Tarkastellaan seuraavaksi operaattoria $T_{\sigma_k}T_\tau$. Voidaan laskea että

$$\begin{aligned}
\Big(T_{\sigma_k}T_\tau\phi\Big)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi)\widehat{\big(T_\tau\phi\big)}(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi)(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} \big(T_\tau\phi\big)(y)\, dy d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi)(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}\ltimes} e^{-iy\cdot\xi} \big(T_\tau\phi\big)(y)\, dy d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi \big(T_\tau\phi\big)(y) dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} K_k(x, x-y)\big(T_\tau\phi\big)(y) dy
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Kannattaa erityisesti huomata, että ykkösen osituksen avulla määritelty σ_k antaa sen edun, että integraali

$$K_k(x, x-y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi \tag{3.11}$$

on hyvin määritelty, koska $\sigma_k(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ muuttujan ξ suhteen. Päättelyä voidaan jatkaa käyttäen Fubinin lausetta ja pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmää. Saadaan

$$\begin{aligned}
\big(T_{\sigma_k}T_\tau\phi\big)(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} K_k(x,x-y)\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\eta}\tau(y,\eta)\widehat{\phi}(\eta)d\eta dy \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\eta}K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)dy\widehat{\phi}(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\lambda_k(x,\eta)\widehat{\phi}(\eta)d\eta \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä

$$\lambda_k(x,\eta) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\eta}K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)dy. \qquad (3.13)$$

Integraali kaavassa (3.13) ei välttämättä ole suppeneva. Tällä ei kuitenkaan ole väliä, sillä integraali tulkitaan distribuutiona, eli $\lambda_k(x,\eta) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Väite, että (3.13) on hyvin määritelty distribuutiomielessä, voidaan perustella seuraavasti.

Ensinnäkin ydin $K_k(x,x-y) \in S'(\mathbb{R}^{2n})$, sillä

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_k(x,x-y)\varphi(x,y)dxdy\Big| \\
&\quad= \Big|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|+|y|)^{-N}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)d\xi(1+|x|+|y|)^N\varphi(x,y)dxdy\Big| \\
&\quad\le \sup_{x,y}\Big(1+|x|+|y|)^N|\varphi(x,y)|\Big)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|+|y|)^{-N}\int_{\Omega_k} C(1+|\xi|)^{m_1}d\xi dxdy,
\end{aligned}$$

missä Ω_k on ykkösen ositukseen liittyvä rajoitettu alue. Näin ollen on olemassa $C > 0$ siten, että

$$|K_k(\varphi)| \le C\|\varphi\|_{N,0}, \qquad (3.14)$$

missä $\|\varphi\|_{N,0}$ on Schwartz-avaruuden seminormi,

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_x \big|x^\alpha D^\beta f(x)\big|. \qquad (3.15)$$

Samoin voidaan osoittaa että $K_k(x,x-y)\tau(y,\eta) \in S'(\mathbb{R}^{3n})$.

$$|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)\varphi(x,y,\eta)dxdyd\eta|$$

$$= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|+|y|+|\eta|)^{-N} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi \tau(y,\eta)$$

$$(1+|x|+|y|+|\eta|)^{N} \varphi(x,y,\eta) dx dy \Big|$$

$$\leq \sup_{x,y,\eta} \Big(1+|x|+|y|+|\eta|)^{N} |\varphi(x,y,\eta)|\Big) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|+|y|+|\eta|)^{-N}$$

$$\int_{\Omega_k} C(1+|\xi|)^{m_1} d\xi (1+|\eta|)^{m_2} dx dy,$$

missä Ω_k on ykkösen ositukseen liittyvä rajoitettu alue. Näin ollen on olemassa $C > 0$ siten, että

$$|K_k\tau(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{N,0}. \tag{3.16}$$

Fourier-muunnos on isomorfismi $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, kts. [10]. Koska λ_k on Fourier-muunnos temperoidusta distribuutiosta $K_k\tau$, niin λ_k on myös temperoitu distribuutio eli $\lambda_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Jatketaan siitä mihin jäimme kohdassa (3.13). Koska nopeasti vähenevän funktion Fourier-muunnos on edelleen nopeasti vähenevä funktio, niin (3.12):ssa nähdään, että distribuutio $e^{ix\cdot\xi}\lambda_k(x,\eta)$ operoi nopeasti vähenevää funktiota $\widehat{\phi}$ ja näin ollen integraali (3.12):ssa on hyvin määritelty. Muuttujanvaihdolla saadaan,

$$\lambda_k(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} K_k(x,z)\tau(x-z,\eta) dz$$

kaikilla $x, \eta \in \mathbb{R}^n$. Tämän perusteella operaattorista $T_{\sigma_k}T_\tau$ päästään summaamalla, kuten kohdassa (3.10), operaattoriin $T_\sigma T_\tau$

$$\big(T_\sigma T_\tau \phi\big)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta} \lambda(x,\eta) \widehat{\phi}(\eta) d\eta,$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä

$$\lambda(x,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x,\eta) \tag{3.17}$$

kaikilla $x, \eta \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Näin ollen todistaaksemme lauseen 3.1.2 on meidän osoitettava, että kaavassa (3.7) määritelty symboli $\lambda(x,\eta)$ kuuluu luokkaan $S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ja että symbolilla $\lambda(x,\eta)$ on asymptoottinen kehitelmä (3.3).

Esitellään muutama lemma ja funktio ennen lauseen 3.1.2 todistusta. Funktiot juontavat juurensa Taylorin kaavasta, joka on todistettu esimerkiksi Wongin kirjassa [27] kappaleessa 6 ja Olli Martion kirjassa Vektorianalyysi [15].

Määritelmä 3.1.5. Määritellään funktiot (3.31) - (3.20). Olkoon σ ja τ lauseen 3.1.2 mukaisia symboleja. Ja olkoon σ_k kuten lemmassa 3.1.4. Taylorin kaavan avulla voimme kirjoittaa symbolin τ toisella tavalla

$$\tau(x-z,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!}\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi) + R_{N_1}(x,z,\xi), \tag{3.18}$$

missä

$$R_{N_1}(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1}\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x-\theta z,\xi)d\theta. \tag{3.19}$$

Funktio R_{N_1} on siten symboliin τ liittyvän Taylorin kehitelmän jäännöstermi. Lisäksi funktion R_{N_1} avulla määritellään funktio $T_{N_1}^{(k)}$

$$T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi)dz. \tag{3.20}$$

Kaavassa K_k on symbolin σ_k ydin.

Seuraavat kolme lemmaa ovat välttämättömiä lauseen 3.1.2 todistuksen kannalta. Ensimmäinen lemma antaa estimaatin pseudodifferentiaalioperaattorin ytimen osittaisderivaatan integraalille.

Lemma 3.1.6. Kaikilla ei-negatiivisilla luvuilla N ja multi-indekseillä α ja β on olemassa vakio A, joka riippuu ainoastaan luvuista n, m ja N ja multi-indekseistä α ja β, siten että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^N |(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k)(x,z)|dz \leq A2^{(m+|\alpha|-N)k} \tag{3.21}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Todistus. Lemma on todistettu Wongin kirjassa [27] kappaleessa 6, (kts. Theorem 6.2). Sivuutetaan varsinainen todistus, mutta katsotaan lyhyesti mikä on todistuksen idea.

Todistus aloitetaan tarkastelemalla integraalia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|z^\gamma \big(\partial_x^\beta \partial_z^\alpha K_k\big)(x,z)\big|^2 dz. \tag{3.22}$$

Käyttämällä ykkösen ositusta, Plancherelin kaavaa, Leibnitzin kaavaa, ytimen K_k määritelmää ja Fourier-analyysin perustuloksia, saadaan, että integraali (3.22) on pienempi kuin

$$2^{k(n+2m+2|\alpha|-2|\gamma|)} C_n 2^n \Big(\sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} C_{\alpha,\beta,\gamma'} C_{\gamma,\gamma'} 2^{2(m+|\alpha|-|\gamma'|)} \Big)^2. \tag{3.23}$$

Vakiotermi A alkaa muotoutua, kun merkitään vakioksi kaikki ensimmäisen termin jälkeen tulevat termit. Tämä vakio riippuu monista luvuista ja multi-indekseistä, mutta ne kaikki ovat sellaisia joista vakion A sallitaan riippuvan.

Tämän jälkeen sovelletaan kaavaa

$$|z|^{2N} \leq n^N \sum_{|\gamma|=N} |z^\gamma|^2, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3.24}$$

siten, että yllä olevan päättelyn avulla saadaan estimaatti lauseessa määritellylle integraalille (3.21). Tässä vaiheessa integraalin (3.21) estimaatti on $A' 2^{k(n+2m+2|\alpha|-2N)}$, missä $A' > 0$ riippuu ainoastaan sille sallituista luvuista ja multi-indekseistä.

Lopuksi luvun 2 potenssissa oleva luvulla 2 kertominen ja potenssi n saadaan eliminoitua käyttäen Hölderin epäyhtälöä.

□

Toinen lemma antaa estimaatin funktion R_{N_1} osittaisderivaatalle.

Lemma 3.1.7. Olkoon R_{N_1} kaavassa (3.19) määritelty funktio. Tällöin kaikilla multi-indekseillä α, β ja γ on olemassa positiivinen vakio $C_{\alpha,\beta,\gamma} > 0$ siten että

$$\big| \big(\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1} \big)(x, z, \xi) \big| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \Big[\sum_{\gamma' \leq \gamma} |z|^{N_1 - |\gamma'|} \Big] (1 + |\xi|)^{m_2 - |\beta|} \tag{3.25}$$

kaikilla $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Aloitetaan osittaisderivoimalla funktiota R_{N_1} muuttujien x ja ξ suhteen multi-indekseillä α ja β jolloin saadaan

$$\big(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1} \big)(x, z, \xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1 - 1} \big(\partial_x^{\alpha+\mu} \partial_\xi^\beta \tau \big)(x - \theta z, \xi) d\theta \tag{3.26}$$

kaikilla $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen kaavan (3.26) ja Leibnitzin kaavan nojalla

$$\big(\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1} \big)(x, z, \xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \frac{1}{\mu!} \big(\partial_z^{\gamma'} (-z)^\mu \big) \int_0^1 (1-\theta)^{N_1 - 1} \tag{3.27}$$

$$\left(\partial_x^{\gamma-\gamma'+\alpha+\mu}\partial_\xi^\beta\tau\right)(x-\theta z,\xi)(-\theta)^{|\gamma-\gamma'|}d\theta$$

kaikilla $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$. Koska $\tau \in S^{m_2}$ niin kaavasta (3.27) seuraa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\partial_z^\gamma\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta R_{N_1}\right)(x,z,\xi)\right| \\
&\leq N_1 \sum_{|\mu|=N_1}\sum_{\gamma'\leq\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}C_{\gamma'}|z|^{N_1-|\gamma'|}\int_0^1 C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu}(1+|\xi|)^{m_2-|\beta|}d\theta \\
&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m_2-|\beta|}\sum_{\gamma'\leq\gamma}|z|^{N_1-|\gamma'|}
\end{aligned}$$

kaikilla $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$, mikä on lemman väite. Vakio $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ muodostuu seuraavasti

$$C_{\alpha,\beta,\gamma} = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sup_{\gamma'\leq\gamma}\left\{\binom{\gamma}{\gamma'}C_{\gamma'}C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu}\right\}. \tag{3.28}$$

□

Juuri todistetun lemman 3.1.7 avulla voidaan todistaa viimeinen lemma ennen lauseen 3.1.2 todistusta. Lemma antaa arvion kasvunopeudeseta funktion $T_{N_1}^{(k)}$ osittaisderivaatoille.

Lemma 3.1.8. Kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla M ja N_1 ja kaikilla multi-indekseillä α ja β on olemassa positiivinen vakio $C_{\alpha,\beta,M,N_1} > 0$ siten, että kohdassa (3.20) määritellyllä funktiolla $T_{N_1}^{(k)}$ on olemassa estimaatti

$$\left|\left(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}\right)(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta,M,N_1}2^{(m_1+2M-N_1)k}(1+|\xi|)^{m_2-2M} \tag{3.29}$$

kaikilla $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Todistus. Todistus seuraa Lemmoista 3.1.7 ja 3.1.6 sekä osittaisintegroinnista. □

Nyt voidaan todistaa kappaleen 3.1 päätulos eli operaattoreiden tuloa koskeva lause 3.1.2.

Todistus. (Lause 3.1.2) Määritellään λ_k, missä $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, siten, että

$$\lambda_k(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}K_k(x,z)\tau(x-z,\xi)dz \tag{3.30}$$

kaikilla $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Käytetään seuraavaksi Taylorin kaavaa. Taylorin kaavan avulla voidaan kirjoittaa symboli τ muotoon

$$\tau(x-z,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!}\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi) + R_{N_1}(x,z,\xi), \tag{3.31}$$

missä

$$R_{N_1}(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1}\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x-\theta z,\xi)d\theta, \tag{3.32}$$

kaikilla $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$. Kun $\tau(x-z,\xi)$ korvataan λ_k:n määritelmässä Taylorin kehitelmällä, siis sillä mitä on kaavassa (3.31) oikealla puolella, huomataan, mistä tulon symbolin asymptoottinen kehitelmä syntyy. Päättely nojaa symboliin σ_k liittyvän ytimen K_k määritelmään, ykkösen ositukseen ja muutamaan Fourier-muunnokseen liittyvän tulokseen. Käsitellään ensin varsinainen Taylorin sarja ja pohditaan jäännöstermiä myöhemmin.

Kun Taylorin kehitelmän päätermi sijoitetaan λ_k:n kaavaan (3.30), saadaan

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} K_k(x,z) \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!}\big(\partial_x^\mu\tau\big)(x,\xi)dz \\
&\quad = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{1}{\mu!}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(-z)^\mu e^{iz\cdot\xi'}\sigma_k(x,\xi')d\xi'\right)dz\big(\partial_x^\mu\tau\big)(x,\xi)
\end{aligned}$$

ytimen K_k määritelmän nojalla. Tästä saadaan osittaisderivoinnin ja osittainintegroinnin avulla

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{1}{\mu!}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(-1)^{|\mu|}(-i)^{|\mu|}\partial_{\xi'}^\mu e^{iz\cdot\xi'}\sigma_k(x,\xi')d\xi'\right)dz\big(\partial_x^\mu\tau\big)(x,\xi) \\
&= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{1}{\mu!}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(-1)^{|\mu|}(-i)^{|\mu|}\partial_{\xi'}^\mu e^{iz\cdot\xi'}\sigma_k(x,\xi')d\xi'\right)dz\big(\partial_x^\mu\tau\big)(x,\xi) \\
&= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi'}\partial_{\xi'}^\mu\sigma_k(x,\xi')d\xi'\right)dz\big(\partial_x^\mu\tau\big)(x,\xi).
\end{aligned}$$

Lopuksi päätellään vielä Fourier-muunnoksen avulla että

$$= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\mathscr{F}_2^{-1}\Big(\partial_{\xi'}^\mu\sigma_k\Big)(x,z)dz\big(\partial_x^\mu\tau\big)(x,\xi)$$

$$= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \mathscr{F}_2 \mathscr{F}_2^{-1} \Big(\partial_{\xi'}^{\mu} \sigma_k \Big)(x,\xi) \big(\partial_x^{\mu} \tau \big)(x,\xi)$$
$$= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_{\xi}^{\mu} \sigma_k(x,\xi) \big(\partial_x^{\mu} \tau \big)(x,\xi).$$

Yllä oleva päättely perustellaan sillä, että Fourier-muunnos on bijektio $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen symboliksi $\lambda_k(x,\xi)$ saadaan

$$\lambda_k(x,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_{\xi}^{\mu} \sigma_k(x,\xi) \big(\partial_x^{\mu} \tau \big)(x,\xi) + T_{N_1}^{(k)}(x,\xi), \tag{3.33}$$

missä

$$T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} K_k(x,z) R_{N_1}(x,z,\xi) dz \tag{3.34}$$

kaikilla $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Nähdään, että tässä ollaan jo hyvin lähellä asymptoottista kehitelmää! Funktion $T_{N_1}^{(k)}$ määrittelevästä integraalista (3.34) kannattaa huomata, että funktio $K_k(x,z)$ on nopeasti vähenevä funktio muuttujan z suhteen. Tämän ansiosta integraali (3.34) on hyvin määritelty. Tarkkaavainen lukija on varmasti huomannut, että nyt kuvaan astui lemman 3.1.8 funktio $T_{N_1}^{(k)}$, joka määriteltiin kohdassa (3.20).

Summataan symbolit λ_k yhteen. Ykkösen osituksen ja kaavojen (3.9), (3.7) ja (3.33) perusteella voidaan päätellä että

$$\begin{aligned}
\lambda(x,\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x,\xi) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \Big(\partial_{\xi}^{\mu} \sigma_k \Big)(x,\xi) \Big(\partial_x^{\mu} \tau \Big)(x,\xi) + T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) \right) \\
&= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \Big(\partial_{\xi}^{\mu} \sigma \Big)(x,\xi) \Big(\partial_x^{\mu} \tau \Big)(x,\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)}(x,\xi),
\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \Big(\partial_{\xi}^{\mu} \sigma \Big)(x,\xi) \Big(\partial_x^{\mu} \tau \Big)(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)}(x,\xi). \tag{3.35}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että kyseessä on asymptoottinen kehitelmä. Määritelmän 3.1 mukaan on osoitettava, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla N pätee

$$\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \partial_{\xi}^{\mu} \sigma(x,\xi) \big(\partial_x^{\mu} \tau \big)(x,\xi) \in S^{m_N},$$

missä luku m_N kuuluu Märitelmän 3.1 mukaiseen lukujonoon. Tähän pyrkien aloitetaan toteamalla, että symbolille $\lambda(x,\xi)$ pätee

$$
\begin{aligned}
&\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_\xi^\mu \sigma(x,\xi)\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi) \\
&\qquad = \lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_\xi^\mu \sigma(x,\xi)\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi) \\
&\qquad\quad + \sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_\xi^\mu \sigma(x,\xi)\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi),
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

missä N_1 on kokonaisluku joka määräytyy Taylorin kehitelmästä ja joka valitaan suuremmaksi kuin N. Osoitetaan, että jälkimmäinen summa kuuluu symboliluokkaan $S^{m_1+m_2-N}$. Olkoot α, $\beta \in \mathbb{N}^n$ mielivaltaiset multi-indeksit. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&\Big|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Big(\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_\xi^\mu \sigma(x,\xi)\big(\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi)\Big)\Big| \\
&\qquad = \Big|\partial_x^\alpha \sum_{\gamma\le\beta}\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_\xi^{\mu+\gamma} \sigma(x,\xi)\big(\partial_\xi^{\beta-\gamma}\partial_x^\mu \tau\big)(x,\xi)\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_{\zeta\le\alpha}\sum_{\gamma\le\beta}\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\zeta\partial_\xi^{\mu+\gamma} \sigma(x,\xi)\big(\partial_\xi^{\beta-\gamma}\partial_x^{\mu+\alpha-\zeta} \tau\big)(x,\xi)\Big| \\
&\qquad \le \sum_{\zeta\le\alpha}\sum_{\gamma\le\beta}\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{1}{\mu!}(1+|\xi|)^{m_1-|\mu+\gamma|}(1+|\xi|)^{m_2-|\beta-\gamma|} \\
&\qquad \le C(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen jälkimmäinen summa todella kuuluu symboliluokkaan $S_{1,0}^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, eli

$$
\sum_{N\le|\mu|\le N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_\xi^\mu \sigma(x,\xi)\partial_x^\mu \tau(x,\xi) \in S_{1,0}^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n).
$$

Jos voidaan osoittaa, että kaikilla multi-indekseillä α, $\beta \in \mathbb{N}^n$ on olemassa vakio $C_{\alpha,\beta}$ siten, että

$$
\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|\le N_1} \frac{(-1)^{|\mu|}}{\mu!}\Big(\partial_\xi^\mu \sigma\Big)\Big(\partial_x^\mu \tau\Big)\right)(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N_1-|\beta|}, \tag{3.37}
$$

kaikilla $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, niin silloin

$$\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu| \leq N} \frac{(-1)^{|\mu|}}{\mu!} \left(\partial_\xi^\mu \sigma\right)\left(\partial_x^\mu \tau\right) \in S_{1,0}^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \tag{3.38}$$

koska $N_1 > N$, ja funktiolla λ on siten nyt todistettavan lauseen väitteen mukainen asymptoottinen kehitelmä. Tuloksen (3.37) osoittamiseen riittää kaavan (3.35) nojalla, että tarkastellaan funktiota $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}$ kaikilla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla N ja multi-indekseillä α, $\beta \in \mathbb{N}^n$ voidaan valita positiivinen kokonaisluku M siten, että

$$(1+|\xi|)^{m_2-2M} \leq (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|}, \tag{3.39}$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$. Kun nyt M on valittu ja siten kiinnitetty, niin voimme valita toisen positiivisen kokonaisluvun N_1 siten, että

$$m_1 + 2M - N_1 < 0. \tag{3.40}$$

Nyt kaavoista (3.35), (3.29), (3.39) ja (3.40) seuraa, että

$$\begin{aligned}
\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\lambda(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \left(\partial_\xi^\mu \sigma\right)\left(\partial_x^\mu \tau\right) \right)(x,\xi) \right| &= \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) \Big| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha,\beta,M,N_1} 2^{(m_1+2M-N_1)k}(1+|\xi|)^{m_2-2M} \\
&\leq C_{\alpha,\beta,M,N_1}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N_1-|\beta|} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(m_1+2M-N_1)k} \\
&\leq C'_{\alpha,\beta,M,N_1}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N_1-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Näin ollen (3.38) on voimassa. Symbolilla $\lambda(x,\xi)$ on siten väitetty asymptoottinen kehitelmä ja voidaan kirjoittaa

$$\lambda \sim \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \left(\partial_\xi^\beta \sigma\right)\left(\partial_x^\mu \tau\right). \tag{3.41}$$

□

Seuraavaksi esitellään ja todistetaan samankaltainen tulos pseudodifferentiaalioperaattorin adjungaatille.

3.2 Adjungaatti

Tässä kappaleessa osoitetaan, että pseudodifferentiaalioperaattorin adjungaatti on olemassa, että se on pseudodifferentiaalioperaattori ja että sen symbolilla on olemassa tietynlainen asymptoottinen kehitelmä. Tällä tuloksella on yhtä tärkeä merkitys jatkon kannalta kuin luvun 3.1 tuloksella. Niitä molempia tullaan hyödyntämään, kun todistetaan tarkkaa Gårdingin epäyhtälöä. Formaalisti adjungaatin määritelmä on seuraava:

Määritelmä 3.2.1. (Adjungaatti) Olkoon σ luokan $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ symboli ja T_σ siihen liittyvä pseudodifferentiaalioperaattori. Pseudodifferentiaalioperaattorin T_σ adjungaatti $T^*_\sigma : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ määritellään siten, että

$$\big(T_\sigma\varphi,\psi\big) = \big(\varphi, T^*_\sigma\psi\big), \tag{3.42}$$

kaikilla $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Määritelmässä esitetyssä kaavassa (3.42) vasen puoli on hyvin määritelty, sillä pseudodifferentiaalioperaattori kuvaa Schwartzin avaruuteen. Tässä kappaleessa osoitetaan, että kaavan oikea puoli on hyvin määritelty ja T^* on myös pseudodifferentiaalioperaattori. Nyt kun tiedetään mitä adjungaatilla tarkoitetaan, niin voidaan esitellä tämän kappaleen päätulos.

Lause 3.2.2. Olkoon $\sigma \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Tällöin pseudodifferentiaalioperaattorin T_σ adjungaatti on pseudodifferentiaalioperaattori T_τ missä $\tau \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Symbolilla τ on asymptoottinen kehitelmä

$$\tau(x,\xi) \sim \sum_\mu \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\Big(\partial^\mu_x\partial^\mu_\xi\overline{\sigma}\Big)(x,\xi). \tag{3.43}$$

Kaava (3.43) tarkoittaa, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla N

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\Big(\partial^\mu_x\partial^\mu_\xi\overline{\sigma}\Big)(x,\xi),$$

on symboli joka kuuluu luokkaan $S^{m-N}_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

Ennen kuin keskustellaan yllä olevan lauseen todistuksesta, esitellään vielä kaksi teknistä lemmaa. Molemmat ovat harjoitustehtäviä Wongin kirjassa. Lemmoista ensimmäinen on seuraava.

Lemma 3.2.3. Kaikilla $z \in \mathbb{R}^n$ ja millä tahansa positiivisella kokonaisluvulla N pätee

$$|z|^{2N} \le n^N \sum_{|\gamma|=N} |z^\gamma|^2. \tag{3.44}$$

Todistus. Sivuutamme todistuksen. □

Selvennyksenä toiseen lemmaan, mainitaan tässä Leibnitzin kaava lineaarisille osittaisdifferentiaalioperaattoreille ja siihen liittyvä merkintätapa.

Määritelmä 3.2.4. Olkoon $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori, missä kertoimet a_α ovat vakioita ja $P(\xi)$ sen symboli. Tällöin $P^{(\mu)}(D)$ on lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori, jonka symboli $P(\xi)$ on seuraava:

$$P^{(\mu)}(\xi) = \partial^\mu P(\xi), \tag{3.45}$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Leibnitzin kaava lineaarisille osittaisdifferentiaalioperaattoreille on seuraava:

Lause 3.2.5. (Leibnitzin kaava lineaarisille osittaisdifferentiaalioperaattoreille) Olkoon $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori, missä kertoimet a_α ovat vakioita ja $P(\xi)$ sen symboli. Tällöin

$$P(D)(fg) = \sum_{|\mu|\leq m} \frac{1}{\mu!}\big(P^{(\mu)}(D)f\big)\big(D^\mu g\big), \tag{3.46}$$

missä $P^{(\mu)}(D)$ on lineaarinen osittaisdifferentiaalioperaattori, jonka symboli $P(\xi)$ on seuraava:

$$P^{(\mu)}(\xi) = \partial^\mu P(\xi), \tag{3.47}$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Todistus sivuutetaan. Todistuksen voi lukea esimerkiksi lähteestä [16]. □

Seuraavaksi esitellään toinen teknisistä lemmoista.

Lemma 3.2.6. Olkoon $P(D) = (1-\Delta)^K$, missä Δ on ns. Laplace-operaattori ja K on positiivinen kokonaisluku. Määritelmän 3.2.4 mukaan määrätylle operaattorille $P^{(\mu)}(D)$ pätee seuraava tulos: On olemassa vakio $C > 0$, joka riippuu ainoastaan multi-indekseistä μ, $\beta \in \mathbb{N}^n$ ja luvusta K siten, että

$$\sum_{|\mu|=N_1} \left|P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}\right| \leq C \sum_{|\mu|=N_1} |z|^{|\mu|+|\beta|-|\delta|}, \tag{3.48}$$

kaikilla $z \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Todistus sivuutetaan. $\square$

Hajotetaan lauseen (3.2.2) todistus kahteen osaan. Tarkastellaan ensin symbolia τ. Jälkimmäisenä näytetään, että tällä on lauseen 3.2.2 mukainen asymptoottinen kehitelmä. Kun osoitetaan väite asymptoottisesta kehitelmästä, niin osoitetaan samalla, että adjungaatti on pseudodifferentiaalioperaattori eli symboli kuuluu tiettyyn symboliluokkaan.

Lause 3.2.7. Olkoon $\sigma(x,\xi) \in S^m_{1,0}$. Pseudodifferentiaalioperaattorin T_σ adjungaatti on T_τ siten, että kaikilla $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\big(T_\tau\psi\big)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\tau(x,\xi)\widehat{\psi}(\xi)d\xi, \tag{3.49}$$

missä

$$\tau(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\overline{K}_k(x+z,z)dz. \tag{3.50}$$

Ydin K_k on määritelty siten, että

$$K_k(x+z,z) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\sigma(x+z,\xi)d\xi. \tag{3.51}$$

Todistus. Määritellään σ_k ja K_k kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin kuin ne määriteltiin edellisessä kappaleessa, eli σ_k määritellään kuten kohdassa (3.9) ja K_k kuten kohdassa (3.11). Tällöin adjungaatin määritelmän nojalla

$$\big(T_{\sigma_k}\varphi,\psi\big) = \big(\varphi, T^*_{\sigma_k}\psi\big) \tag{3.52}$$

kaikilla $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Avaruuden $L^2(\mathbb{R}^n)$ sisätulon ja pseudodifferentiaalioperaattorin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\big(T_{\sigma_k}\varphi,\psi\big) &= \int_{\mathbb{R}^n}\big(T_{\sigma_k}\varphi\big)(x)\overline{\psi(x)}dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\overline{\psi(x)}dx.\end{aligned}$$

Edelleen Fourier-muunnoksen ja ytimen K_k määritelmän nojalla saadaan

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}\varphi(y)dyd\xi\overline{\psi(x)}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_k(x,\xi) d\xi \varphi(y) dy \overline{\psi(x)} dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_k(x, x-y) \varphi(y) dy \overline{\psi(x)} dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_k(x, x-y) \overline{\psi(x)} dx \varphi(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \, \overline{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_k(x, x-y) \psi(x) dx} \, dy \\
&= \big(\varphi, T^*_{\sigma_k} \psi\big).
\end{aligned}
$$

Näin ollen saatiin tulos, joka kertoo minkälainen on pseudodifferentiaalioperaattorin T_{σ_k} adjungaatti. Adjungaatissa on alkuperäisen pseudodifferentiaalioperaattorin ytimen K_k sijaan sen kompleksikonjugaatti

$$
\big(T^*_{\sigma_k} \psi\big)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_k(y, y-x) \psi(y) dy. \tag{3.53}
$$

Huomautettakoon lukijalle, että tottumuksen vuoksi muuttujien x ja y paikat vaihdetaan tavanomaisiksi suhteessa siihen, mitä ne ovat kaavaa johdettaessa. Integraalissa olevaa lauseketta voidaan edelleen muokata ottamalla mukaan Schwartzin funktion ψ Fourier-muunnos ja lisätä ja vähentää integraalista termi $e^{ix\cdot\xi}$. Näillä muutoksilla saadaan

$$
\begin{aligned}
\big(T^*_{\sigma_k} \psi\big)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_k(y, y-x) \psi(y) dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_k(y, y-x) \, (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi \, dy \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} \overline{K}_k(y, y-x) \, dy \, \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-x)\cdot\xi} \overline{K}_k(y, y-x) \, dy \, \widehat{\psi}(\xi) d\xi.
\end{aligned}
$$

Lopuksi tehdään vielä muuttujanvaihto $y - x = z$,

$$
\begin{aligned}
\big(T^*_{\sigma_k} \psi\big)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \, (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \overline{K}_k(x+z, z) \, dz \, \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \, \tau_k(x,\xi) \, \widehat{\psi}(\xi) d\xi. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Kaava (3.54) on hyvin määritelty siitä syystä, että $\widehat{\psi}$ on nopeasti vähenevä funktio. Näin ollen adjungaatiksi saadaan pseudodifferentiaalioperaattori T_{τ_k}

$$
\big(T^*_{\sigma_k} \psi\big)(x) = \big(T_{\tau_k} \psi\big)(x), \tag{3.55}
$$

jonka symbolina on $\tau_k(x,\xi)$

$$\tau_k(x,\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\overline{K}_k(x+z,z)\,dz. \tag{3.56}$$

Voimme ajatella $\tau_k(x,\xi)$:n distribuutiona, eli $\tau_k(x,\xi) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ muuttujan ξ suhteen kun muuttuja x on kiinnitetty. Tämä voidaan osoittaa seuraavalla tavalla. Olkoon $\varphi(z) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tällöin on olemassa $C' > 0$ siten, että

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K}_k(x+z,z)\varphi(z)dz\Big| &= \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}(1+|z|)^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}\overline{\sigma}_k(x+z,\xi)d\xi(1+|z|)^N\varphi(z)dz\Big| \\
&\le \sup_z (1+|z|)^N|\varphi(z)|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}(1+|z|)^{-N}\int\limits_{\Omega_k} C(1+|\xi|)^{m_1}d\xi dz \\
&\le C'\|\varphi\|_{N,0},
\end{aligned}$$

missä Ω_k on ykkösen ositukseen liittyvä rajoitettu alue ja $\|\varphi\|_{N,0}$ on Schwartz-avaruuden seminormi. Yllä oleva päättely osoittaa, että $K(x+z,z)$ on temperoitu distribuutio muuttujan z suhteen, eli $K(x+z,z) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Kohdassa (3.56) määriteltiin $\tau(x,\xi)$ Fourier-muunnoksena distribuutiosta $K(x+z,z)$. Koska Fourier-muunnos on bijektio $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, kts. [10], niin $\tau(x,\xi)$ on temperoitu distribuutio muuttujan ξ suhteen.

Adjungaatin symboli voidaan määritellä koko avaruuteen summaamalla yhteen ykkösen osituksella aikaan saatuja $\tau_k(x,\xi)$ symboleita. Kun $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ja $\sigma_k(x,\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ niin integraali

$$\big(T_{\sigma_k}\varphi,\psi\big) = \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\,\overline{\psi}(x)dx$$

on hyvin määritelty. Tällöin $\sum_{k=0}^{N_2}\big(T_{\sigma_k}\varphi,\psi\big)$ on hyvin määritelty kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla N_2, koska

$$\big|\big(T_\sigma\varphi,\psi\big)\big| \le \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^m|\widehat{\varphi}(\xi)|d\xi\,|\overline{\psi}(x)|dx < \infty.$$

Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\big(T_\sigma\varphi,\psi\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(T_{\sigma_k}\varphi,\psi\big). \tag{3.57}$$

Näin ollen adjungaatin symboli τ on

$$\tau(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\overline{K}_k(x+z,z)\,dz. \tag{3.58}$$

□

Nyt on osoitettu minkälainen on pseudodifferentiaalioperaattorin adjungaatti. Vielä olisi näytettävä, että adjungaatin symboli kuuluu symboliluokkaan S^m, eli että kyseessä todella on pseudodifferentiaalioperaattorin määrittävä symboli, ja että tällä symbolilla on Lauseen 3.2.2 mukainen asymptoottinen kehitelmä. Nämä molemmat kysymykset ratkaistaan osoittamalla, että adjungaatin symbolilla $\tau(x,\xi)$ on jo mainittu asymptoottinen kehitelmä. Nimittäin, mikäli adjungaatin symbolilla $\tau(x,\xi)$ on Lauseen 3.2.2 mukainen asymptoottinen kehitelmä (3.43), niin silloin pätee

$$\tau(x,\xi) - \overline{\sigma}(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-1}. \tag{3.59}$$

Tästä seuraa, että on olemassa symboli $r(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-1}$ siten, että

$$\tau(x,\xi) = \overline{\sigma}(x,\xi) + r(x,\xi) \tag{3.60}$$

kaikilla $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. Koska $\sigma \in S_{1,0}^m$, niin yllä olevasta kaavasta (3.60) seuraa, että $\tau(x,\xi) \in S_{1,0}^m$. Siten riittää, että asymptoottisen kehitelmän osoitetaan olevan voimassa.

Todistus. (Lause 3.2.2) Olkoon $N, N_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $N_1 > N$. Pyritään osoittamaan, että

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \Big(\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}\Big)(x,\xi),$$

on symboli joka kuuluu luokkaan $S_{1,0}^{m-N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Määritellään τ_k kaikilla $k \in \mathbb{N}$ kuten kohdassa (3.56). Ydin $\overline{K_k}$ voidaan esittää Taylorin sarjakehitelmän avulla sarjana

$$\overline{K_k}(x+z,z) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{z^\mu}{\mu!} \big(\partial_x^\mu \overline{K_k}\big)(x,z) + \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z), \tag{3.61}$$

missä $\overline{R}_{N_1}^{(k)}$ on

$$\begin{aligned} \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) &= N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{z^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} \big(\partial_x^\mu \overline{K_k}\big)(x+\theta z, z) d\theta \\ &= N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{z^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} \big(\partial_x^\mu \overline{\sigma}\big)(x+\theta z, z) d\xi \, d\theta. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Kun Taylorin kehitelmä sijoitetaan symbolin τ_k määritelmään (3.56) saadaan

$$\tau_k(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \overline{K}_k(x+z,z) dz$$

$$(3.63) \qquad = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \Big(\sum_{|\mu|<N_1} \frac{z^\mu}{\mu!} \big(\partial_x^\mu \overline{K}_k\big)(x,z) + \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) \Big) dz.$$

Käsitellään ensin sarjan päätermi. Ytimen määritelmän, osittaisderivoinnin, osittaisintegroinnin ja Fourier-muunnoksen avulla saadaan

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \sum_{|\mu|<N_1} \frac{z^\mu}{\mu!} \big(\partial_x^\mu \overline{K}_k\big)(x,z) dz \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \sum_{|\mu|<N_1} \frac{z^\mu}{\mu!} (2\pi)^{-n/2} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi'} \big(\partial_x^\mu \sigma_k\big)(x,\xi') d\xi' dz} \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(i)^{|\mu|}}{\mu!} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\xi'}^\mu e^{-iz\cdot\xi'} \big(\partial_x^\mu \overline{\sigma}_k\big)(x,\xi') d\xi' dz \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi'} \big(\partial_{\xi'}^\mu \partial_x^\mu \overline{\sigma}_k\big)(x,\xi') d\xi' dz \\
&= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \big(\mathscr{F}_2 \partial_{\xi'}^\mu \partial_x^\mu \overline{\sigma}_k\big)(x,z) dz \\
&= \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \big(\mathscr{F}_2^{-1} \mathscr{F}_2 \partial_\xi^\mu \partial_x^\mu \overline{\sigma}_k\big)(x,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \big(\partial_\xi^\mu \partial_x^\mu \overline{\sigma}_k\big)(x,\xi),
\end{aligned}$$

kaikilla $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä tosiasiasta, että Fourier-muunnos on bijektio $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Päättelyketjun viimeinen lauseke on lauseen väitteen mukainen sarja! Määritellään integraalissa (3.63) jäännöstermistä $\overline{R}_{N_1}^{(k)}$ uusi funktio $T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)$ siten, että

$$(3.64) \qquad T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) dz,$$

kaikilla $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen symboliksi $\tau_k(x,\xi)$ saadaan,

$$(3.65) \qquad \tau_k(x,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \big(\partial_\xi^\mu \partial_x^\mu \overline{\sigma}_k\big)(x,\xi) + T_{N_1}^{(k)}(x,\xi),$$

kaikilla $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. Kun otetaan huomioon kaavat (3.58) ja (3.9), niin valituilla kokonaisluvuilla N ja N_1 pätee, että

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^\mu}{\mu!} \partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi)$$

$$= \tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi) + \sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi).$$

Symboli τ saatiin summaamalla yhteen symbolit τ_k. Osoitetaan seuraavaksi, että jälkimmäinen summa on symboli joka kuuluu luokkaan $S_{1,0}^{m-N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \Big|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi)\Big| &= \Big|\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^{\mu+\alpha} \partial_\xi^{\mu+\beta} \overline{\sigma}(x,\xi)\Big| \\ &\le \sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{1}{\mu!}(1+|\xi|)^{m-|\mu+\beta|} \le C(1+|\xi|)^{m-N-|\beta|}. \end{aligned}$$

Näin ollen jälkimmäinen summa todella kuuluu symboliluokkaan S^{m-N}

$$\sum_{N\le|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Mikäli voidaan osoittaa, että

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \tag{3.66}$$

niin silloin voidaan päätellä, että $\tau \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ja että symbolilla $\tau(x,\xi)$ on asymptoottinen kehitelmä (3.43). Symboliluokkaa määrittää luku N ja sarjaa määrittää luku N_1, joka on valittua lukua N suurempi. Tästä on etua todistuksessa.

Kaavoista (3.9), (3.58) ja (3.65) voidaan päätellä että

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)}(x,\xi). \tag{3.67}$$

Kaavan (3.67) nojalla voidaan käyttää sarjaa $\sum_{k=0}^\infty T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)$, kun pyritään osoittamaan, että $\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma}(x,\xi)$ kuuluu symboliluokkaan S^{m-N}. Lähdetään osoittamaan tätä ja valitaan mielivaltaiset multi-indeksit α, $\beta \in \mathbb{N}^n$. Tällöin $T_{N_1}^{(k)}$:n määritelmän (3.64) ja osittaisintegroinnin nojalla

$$\begin{aligned} \big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\big| &= \Big|D_x^\alpha D_\xi^\beta (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)dz\Big| \\ &= \Big|(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} z^\beta e^{iz\cdot\xi} D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)dz\Big| \end{aligned}$$

$$= \left|(1+|\xi|^2)^{-K}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1-\Delta_z)^K e^{iz\cdot\xi} z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)dz\right|$$

$$= \left|(1+|\xi|^2)^{-K}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}(1-\Delta_z)^K \Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)dz\right|, \tag{3.68}$$

missä K on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku. Jätetään nyt kaava (3.68) hetkeksi rauhaan ja selvitetään mitä voidaan sanoa integraalissa olevasta termistä $(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)$, sillä termin $\big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\big|$ estimointi on nyt kiinni siitä. Olkoon $P(D)=(1-\Delta_z)^K$. Kaavan (3.62), Leibnitzin kaavan ja osittainintegroinnin avulla saadaan

$$\begin{aligned}
&(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)\\
&= (1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{N_1\sum_{|\mu|=N_1}\frac{z^\mu}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\big(\partial_x^\mu\sigma_k\big)(x+\theta z,z)d\xi\, d\theta}\Big)\\
&= (1-\Delta_z)^K\Big(N_1\sum_{|\mu|=N_1}\frac{z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}\\
&\qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}e^{-iz\cdot\xi}\big(\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma_k}\big)(x+\theta z,z)d\xi\, d\theta\Big)\\
&= N_1\sum_{|\mu|=N_1}\sum_{|\delta|\le 2K}\binom{2K}{\delta}\frac{P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}\\
&\qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}\sum_{\rho\le\delta}D_z^\rho e^{-iz\cdot\xi}\big(D_z^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma_k}\big)(x+\theta z,z)d\xi\, d\theta\\
&= N_1\sum_{|\mu|=N_1}\sum_{|\delta|\le 2K}\binom{2K}{\delta}\frac{P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}\\
&\qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}\sum_{\rho\le\delta}\theta^{|\delta-\rho|}\binom{\delta}{\rho}D_z^\rho e^{-iz\cdot\xi}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma_k}\big)(x+\theta z,z)d\xi\, d\theta\\
&= N_1\sum_{|\mu|=N_1}\sum_{|\delta|\le 2K}\sum_{\rho\le\delta}\binom{\delta}{\rho}\binom{2K}{\delta}\frac{P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1\theta^{|\delta-\rho|}(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}\\
&\qquad\qquad \int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}(-i\xi)^\rho e^{-iz\cdot\xi}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma_k}\big)(x+\theta z,z)d\xi\, d\theta\\
&= N_1\sum_{|\mu|=N_1}\sum_{|\delta|\le 2K}\sum_{\rho\le\delta}\binom{\delta}{\rho}\binom{2K}{\delta}\frac{P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1\theta^{|\delta-\rho|}(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|}(-i)^{\rho} z^{-\gamma}(i\partial_\xi)^{\gamma} e^{-iz\cdot\xi}\xi^{\rho}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma_k}\big)(x+\theta z,z)d\xi\, d\theta$$

$$= N_1 \sum_{|\mu|=N_1}\sum_{|\delta|\le 2K}\sum_{\rho\le\delta}\binom{\delta}{\rho}\binom{2K}{\delta}\frac{P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1 \theta^{|\delta-\rho|}(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}(-i)^{\rho}z^{-\gamma}e^{-iz\cdot\xi}\sum_{\gamma'\le\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}D_\xi^{\gamma'}\Big(\xi^{\rho}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma}\big)$$

$$(x+\theta z,z)\Big)D_\xi^{\gamma-\gamma'}\varphi_k(\xi)d\xi\, d\theta,$$

kaikilla $x, z \in \mathbb{R}^n$. Yllä olevan perusteella

(3.69)

$$(1-\Delta_z)^K\Big(z^{\beta}D_x^{\alpha}\overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)$$

$$= N_1 \sum_{|\mu|=N_1}\sum_{|\delta|\le 2K}\sum_{\rho\le\delta}\binom{\delta}{\rho}\binom{2K}{\delta}\frac{P^{(\delta)}(D)z^{\mu+\beta}}{\mu!}\int_0^1 \theta^{|\delta-\rho|}(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}(-i)^{\rho}z^{-\gamma}e^{-iz\cdot\xi}\sum_{\gamma'\le\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}D_\xi^{\gamma'}\Big(\xi^{\rho}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma}\big)(x+\theta z,z)\Big)D_\xi^{\gamma-\gamma'}\varphi_k(\xi)d\xi\, d\theta.$$

Nyt kun termi $(1-\Delta_z)^K\Big(z^{\beta}D_x^{\alpha}\overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)$ on saatu sopivaan muotoon, niin sitä voidaan estimoida.

Aloitetaan tarkastelemalla miten voidaan estimoida kaavan (3.69) integraalia muuttujan ξ suhteen ja jätetään muuttujan θ integraalin tarkastelu hetkeksi syrjään. Tehdään tarkastelu ilman termiä $z^{-\gamma}$. Otetaan huomioon funktion φ_k kantaja. Merkitään $W_k = \operatorname{supp}(\varphi_k) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}\}$. Käytetään taas kerran Leibnitzin kaavaa ja osittaisintegrointia, jolloin saadaan estimaatti

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\alpha|}(-i)^{\rho}e^{-iz\cdot\xi}\sum_{\gamma'\le\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}D_\xi^{\gamma'}\Big(\xi^{\rho}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma}\big)(x+\theta z,z)\Big)D_\xi^{\gamma-\gamma'}\varphi_k(\xi)d\xi\Big|$$

$$= \Big|\int_{W_k}(-i)^{|\alpha|}(-i)^{\rho}e^{-iz\cdot\xi}\sum_{\gamma'\le\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}D_\xi^{\gamma'}\Big(\xi^{\rho}\big(D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma}\big)(x+\theta z,z)\Big)D_\xi^{\gamma-\gamma'}\varphi_k(\xi)d\xi\Big|$$

$$\le \int_{W_k}\sum_{\gamma'\le\gamma}\binom{\gamma}{\gamma'}\sum_{\gamma''\le\gamma'}\binom{\gamma'}{\gamma''}C_{p,\gamma''}\big|\xi^{\rho-\gamma''}\big|\big|D_\xi^{\gamma'-\gamma''}D_x^{\rho-\delta}\partial_x^{\mu+\alpha}\overline{\sigma}(x+\theta z,z)\big|\big|D_\xi^{\gamma-\gamma'}\varphi_k(\xi)\big|d\xi.$$

Lauseessa 3.1.1 esitellyn ykkösen osituksen ominaisuuksien nojalla, kaikilla multi-indekseillä $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on olemassa vakio $C_\alpha > 0$ siten, että

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\big|(\partial^{\alpha}\varphi_k)(\xi)\big| \le C_\alpha 2^{-k|\alpha|} \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}^n. \tag{3.70}$$

Käyttäen tulosta (3.70) ja tietoa $\sigma \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ voidaan arvioida, että

$$\begin{aligned}
&\int_{W_k} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \sum_{\gamma'' \leq \gamma'} \binom{\gamma'}{\gamma''} C_{p,\gamma''} \big|\xi^{\rho-\gamma''}\big| \big|D_\xi^{\gamma'-\gamma''} D_x^{\rho-\delta} \partial_x^{\mu+\alpha} \overline{\sigma}(x+\theta z, z)\big| \big|D_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi)\big| d\xi \\
&\qquad \leq \int_{W_k} C_{p,\gamma} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \sum_{\gamma'' \leq \gamma'} (1+|\xi|)^{|\rho|-|\gamma''|} (1+|\xi|)^{m-|\gamma'-\gamma''|} C_\alpha 2^{-k|\gamma-\gamma'|} d\xi \\
&\qquad = \int\limits_{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}} C_{p,\gamma,\alpha} \sum_{\gamma' \leq \gamma} (1+|\xi|)^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{-k|\gamma-\gamma'|} d\xi. \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

Riippuen luvusta $m \in \mathbb{R}$ ja multi-indekseistä ρ, $\gamma \in \mathbb{N}^n$, potenssi $m + |\rho| - |\gamma'|$ voi olla negatiivinen tai positiivinen. Koska integrointi on rajoitettu alueeseen $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$, niin mikäli $m + |\rho| - |\gamma'| < 0$, tällöin

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{m+|\rho|-|\gamma'|} &\leq (1+2^{k-1})^{m+|\rho|-|\gamma'|} = \Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\Big)^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{k(m+|\rho|-|\gamma'|)} \\
&\leq \Big(\frac{3}{2}\Big)^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{k(m+|\rho|-|\gamma'|)}.
\end{aligned}$$

Toisaalta mikäli $m + |\rho| - |\gamma'| \geq 0$, niin

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{m+|\rho|-|\gamma'|} &\leq (1+2^{k+1})^{m+|\rho|-|\gamma'|} = (2^{-k}+2)^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{k(m+|\rho|-|\gamma'|)} \\
&\leq 3^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{k(m+|\rho|-|\gamma'|)}.
\end{aligned}$$

Voidaan siis sanoa, että on olemassa vakio $C > 0$, joka ei riipu k:sta siten, että

$$(1+|\xi|)^{m+|\rho|-|\gamma'|} \leq C 2^{(m+|\rho|-|\gamma'|)k} \qquad (3.72)$$

kaikilla $\xi \in W_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$. Vakio $C > 0$ on yhteinen kaikille joukoille W_k. Otetaan nyt mukaan tarkasteluun termi $z^{-\gamma}$. Lemman 3.2.3 mukaan kaikilla $z \in \mathbb{R}^n$ ja millä tahansa positiivisella kokonaisluvulla N pätee

$$|z|^{2N} \leq n^N \sum_{|\gamma|=N} |z^\gamma|^2. \qquad (3.73)$$

Tällöin kaavassa (3.69) esiintyvällä termillä $z^{-\gamma}$ on olemassa vakio $M > 0$ siten, että

$$|z^{-\gamma}| \leq C_{M,\gamma} |z|^{-2M}. \qquad (3.74)$$

Käyttäen tuloksia (3.74), (3.72) ja (3.71) voidaan laskea, että

$$\Big| z^{-\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} (-i)^\rho e^{-iz\cdot\xi} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} D_\xi^{\gamma'} \Big(\xi^\rho \big(D_x^{\rho-\delta} \partial_x^{\mu+\alpha} \overline{\sigma}\big)(x+\theta z, z)\Big) D_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi) d\xi \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |z^\gamma| \int\limits_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1}} C_{p,\gamma,\alpha} \sum_{\gamma'\leq\gamma} (1+|\xi|)^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{-k|\gamma-\gamma'|} d\xi \\
&\leq |z^\gamma| \int\limits_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1}} C_{p,\gamma,\alpha} \sum_{\gamma'\leq\gamma} C 2^{(m+|\rho|-|\gamma'|)k} 2^{-k|\gamma-\gamma'|} d\xi \\
&\leq C_{M,\gamma,p,\alpha} |z|^{-2M} 2^{(m+|\rho|-M)k} \int\limits_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+1}} d\xi \\
&\leq C_{M,\gamma,p,\alpha} |z|^{-2M} 2^{(m+|\rho|-M)k} C_n 2^{kn} = C_{M,\gamma,p,\alpha,n} |z|^{-2M} 2^{(m+|\rho|-M+n)k}.
\end{aligned}
$$

Kun otetaan vielä huomioon, että kaavasta (3.69) saadaan $|\rho| = 2K$, muuttujan ξ integraalille saadaan estimaatti

$$
\begin{aligned}
&\left| z^{-\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} (-i)^{\rho} e^{-iz\cdot\xi} \sum_{\gamma'\leq\gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} D_\xi^{\gamma'} \Big(\xi^\rho \big(D_x^{\rho-\delta} \partial_x^{\mu+\alpha} \overline{\sigma} \big)(x+\theta z, z) \Big) D_\xi^{\gamma-\gamma'} \varphi_k(\xi) d\xi \right| \\
&\qquad \leq C_{M,\gamma,p,\alpha,n} |z|^{-2M} 2^{(m+2K-M+n)k},
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

missä $z \in \mathbb{R}^n$. Yllä oleva vakio $C_{M,\gamma,\rho,\alpha,n} > 0$ ei riipu k:sta. Nyt kun on löydetty hyvä estimaatti muuttujan ξ integraalille, voidaan siirtyä käsittelemään funktion $(1-\Delta_z)^K \Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) \Big)$ integrointia muuttujan z suhteen. Jatketaan siitä mihin kaavassa (3.69) jäätiin ja käytetään estimaattia (3.75). Voidaan arvioida, että

$$
\begin{aligned}
&\left| (1-\Delta_z)^K \Big(z^\beta \big(D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) \big) \Big) \right| \\
&\leq C_{N_1,n,K} \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{|\delta|\leq 2K} \left| P^{(\delta)}(D) z^{\mu+\beta} \right| \int_0^1 |\theta|^{|\delta-\rho|} |1-\theta|^{N_1-1} \\
&\qquad \cdot C_{M,\gamma,p,\alpha,n} |z|^{-2M} 2^{(m+2K-M+n)k} \, d\theta.
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

Soveltamalla lemmaa 3.2.6 saadaan, että

$$
\begin{aligned}
&\left| (1-\Delta_z)^K \Big(z^\beta \big(D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) \big) \Big) \right| \\
&\leq C_{N_1,n,K,M,\gamma,\alpha} \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{|\delta|\leq 2K} |z|^{|\mu|+|\beta|-|\delta|} |z|^{-2M} 2^{(m+2K-M+n)k} \\
&\leq C_{N_1,n,K,M,\gamma,\alpha} \sum_{|\delta|\leq 2K} |z|^{N_1+|\beta|-|\delta|} |z|^{-2M} 2^{(m+2K-M+n)k}.
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Funktiota $(1-\Delta_z)^K \Big(z^\beta \big(D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z) \big)$ on nyt estimoitu riittävästi. Voimme palata kohtaan (3.68) missä käsiteltiin funktion $D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)$ estimointia. Palautetaan mieleen, että kaavan (3.68) mukaan

$$
\begin{aligned}
&\big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\big| \\
&= \Big|(1+|\xi|^2)^{-K}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)dz\Big|.
\end{aligned}
$$

Jaetaan integrointi kahteen alueeseen sen mukaan onko $|z|$ suurempi vai pienempi kuin 1. Vakioiden M, K ja N_1 valinnalla tulee nyt olemaan merkitystä ja ne on valittava seuraavalla tavalla. Valitaan luku K kohdassa (3.68) niin suureksi, että

$$
(1+|\xi|)^{-2K} \leq (1+|\xi|)^{m-N-|\beta|}. \tag{3.78}
$$

Alueessa $|z| \leq 1$ vakiot $M > 0$ ja $N_1 > 0$ valitaan kohdissa (3.74) ja (3.61) niin suuriksi, että (ja merkitään M:n sijaan M')

$$
m + 2K - M' + n < 0, \tag{3.79}
$$

ja

$$
\int_{|z|\leq 1} |z|^{-2M'}\Big(\sum_{|\delta|\leq 2K}|z|^{|\beta|+N_1-\delta}\Big)dz < \infty. \tag{3.80}
$$

Ajatus on, että ensin valitaan vakio M' niin, että (3.79) pätee ja sen jälkeen valitaan tarpeeksi suuri luku N_1, jotta integraali (3.80) suppenee. Näiden vakioiden ja tiedon (3.77) avulla voidaan käsitellä kaavassa (3.68) esiintyvä z muuttujan integrointi alueessa $|z| \leq 1$ siten, että

$$
\begin{aligned}
&\int_{|z|\leq 1}\Big|(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta\big(D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\big)\Big)\Big|dz \\
&\qquad \leq C_{N_1,n,K,M',\gamma,\alpha}2^{(m+2K-M'+n)k}\int_{|z|\leq 1}|z|^{-2M'}\sum_{|\delta|\leq 2K}|z|^{N_1+|\beta|-|\delta|}dz \\
&\qquad \leq C'_{N_1,n,K,M',\gamma,\alpha}2^{(m+2K-M'+n)k}.
\end{aligned}
$$

Alueen $|z| > 1$ integroimisessa vakio M valitaan toisenlaisella tavalla. Valitaan vakio $M > 0$ (ja merkitsemme M:n sijaan M'') siten, että

$$
m + 2K - M'' + n < 0, \tag{3.81}
$$

ja

$$
\int_{|z|>1} |z|^{-2M''}\Big(\sum_{|\delta|\leq 2K}|z|^{|\beta|+N_1-\delta}\Big)dz < \infty. \tag{3.82}
$$

Huomionarvoista on, että N_1 on kiinnitetty jotta integraali (3.80) suppenee. Nyt integraalissa (3.82) vakio N_1 on jo kiinnitetty ja on sama kuin alueen $|z| \leq 1$ integroinnissa. Valitsemalla vakio M'' tarpeeksi suureksi saadaan integraali (3.82) suppenemaan. Tällöin on olemassa vakio $C_{N_1,n,K,M',\gamma,\alpha} > 0$ siten, että

$$\int\limits_{|z|>1} \Big|(1-\Delta_z)^K \Big(z^\beta \big(D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\big)\Big)\Big| dz \leq C_{N_1,n,K,M'',\gamma,\alpha} 2^{(m+2K-M''+n)k}. \tag{3.83}$$

Nyt voidaan palata siihen mihin kohdassa (3.68) jäätiin ja lasketaan estimaatti osittaisderivaatalle $D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)$ siten, että

$$\begin{aligned}
\big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\big| &= \Big|(1+|\xi|^2)^{-K}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)dz\Big| \\
&= C_n(1+|\xi|^2)^{-K}\Bigg[\int_{|z|\leq 1}\Big|(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)\Big|dz \\
&\quad + \int_{|z|>1}\Big|(1-\Delta_z)^K\Big(z^\beta D_x^\alpha \overline{R}_{N_1}^{(k)}(x,z)\Big)\Big|dz\Bigg] \\
&\leq C_{N_1,n,K,M',M'',\gamma,\alpha}(1+|\xi|^2)^{-K}\Big[2^{(m+2K-M'+n)k} + 2^{(m+2K-M''+n)k}\Big].
\end{aligned}$$

On siis olemassa vakio $C > 0$, joka ei riipu k:sta siten, että

$$\big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\big| \leq C(1+|\xi|^2)^{-K}\Big[2^{(m+2K-M'+n)k} + 2^{(m+2K-M''+n)k}\Big]. \tag{3.84}$$

Johtuen luvun K valinnasta kohdassa (3.78) seuraa tästä, että

$$\big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\big| \leq C(1+|\xi|^2)^{m-N-|\beta|}\Big[2^{(m+2K-M'+n)k} + 2^{(m+2K-M''+n)k}\Big]. \tag{3.85}$$

Kun summataan termien k yli, saadaan estimaatti

$$\begin{aligned}
\Big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}(x,\xi)\Big| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\Big|D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)\Big| \\
&\leq C(1+|\xi|^2)^{m-N-|\beta|}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[2^{(m+2K-M'+n)k} + 2^{(m+2K-M''+n)k}\Big] \\
&\leq C'(1+|\xi|^2)^{m-N-|\beta|}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Tällöin kaavojen (3.86) ja (3.67) perusteella on selvää, että

$$\tau(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N_1}\frac{(-i)^\mu}{\mu!}\partial_x^\mu\partial_\xi^\mu\overline{\sigma}(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-N}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n). \tag{3.87}$$

Näin ollen lause pätee.

□

Tulo-operaattorin ja adjungaatin symboleihin liittyvät lauseet on todistettu, joten siirrytään uuteen lukuun. Tulevassakaan luvussa pseudodifferentiaalioperaattoreita ei hylätä, mutta jatkossa ajattelua ohjaa pyrkimys todistaa tarkka Gårdingin epäyhtälö. Pseudodifferentiaalioperaattoreiden tässä esittelemättä jäävistä ominaisuuksiksista lukija löytää kiinnostavaa luettavaa Trevesin [23] ja Grubbin [6] kirjoista.

Luku 4

L^2-teoria ja tarkka Gårdingin epäyhtälö

Tämän luvun päätulos on tarkka Gårdingin epäyhtälö. Lause kantaa edesmenneen Lundin yliopiston matematiikan professorin Lars Gårdingin nimeä. Tämän epäyhtälön ensimmäinen versio, Gårdingin epäyhtälö, julkaistiin vuonna 1953 artikkelissa [7]. Myöhemmin vuonna 1966 Lars Hörmander, joka on myös Lundissa opiskellut ja siellä professorina toiminut matemaatikko, kehitti epäyhtälöä edelleen ja näin saatiin lause, joka kantaa nimeä tarkka Gårdingin epäyhtälö. Hörmanderin kehittelemä tulos julkaistiin artikkelissa [11]. Ennen kuolemaansa Gårding ehti kirjoittaa epäviralliset muistelmat elämästään [8].

Tämä luku perustuu Michael E. Taylorin kirjaan Partial differential equations II [22], lukuunottamatta Tarkan Gårdingin epäyhtälön todistusta.

4.1 L^2-teoria

Gårdingin epäyhtälöiden todistamiseksi on tarvitaan lisää tietoa pseudodifferentiaalioperaattoreista ja siksi esitellään vielä lemmoja niihin liittyen. Ehkä olennaisin näistä lemmoista kertoo, että tiettyyn symboliluokkaan kuuluva symboli σ määrittelee pseudodifferentiaalioperaattorin T_σ jolle pätee $T_\sigma : L^2 \to L^2$.

Esitellään luvun aluksi tulos, jonka mukaan S^0-luokan symbolit säilyvät S^0-luokan symboleina sileässä kuvauksessa. Tulos on peräisin Hörmanderin kirjasta [10], lemma 18.1.10.

Lemma 4.1.1. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Jos $\{a_j \in S^0 : j = 1, \cdots, k\}$ ja $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k)$, niin $F(a_1, \cdots, a_k) \in S^0$.

Todistus. Koska $\operatorname{Re} a_v, \operatorname{Im} a_v \in S^0$ kaikilla $v \in \{1, \cdots, k\}$, voidaan olettaa, että a_v on reaalinen kaikilla $v \in \{1, \cdots, k\}$ ja että $F \in C(\mathbb{R}^k)$.

Symboleiden a_v, missä $v \in \{1, \cdots, k\}$, symboliluokan S^0 perusteella voidaan päätellä, että kaikilla $v \in \{1, , k\}$ on olemassa vakio $C > 0$ siten, että $|a_v(x, \xi)| \leq C$ kaikilla

$x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Tämä johtaa siihen, että symbolit a_v rajaavat funktion $F(z)$, missä $z \in \mathbb{R}^k$, kuulaan $B(0, R)$, jossa kuulan säteeksi R voidaan valita suurin symboleita a_v rajoittava vakio. Tästä rajoittuneisuudesta johtuen on olemassa vakio $C' > 0$ siten, että $|F(a)| \leq C'$.

Osoitetaan matemaattisella induktiolla, että kaikilla multi-indekseillä $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ on olemassa vakio $C > 0$ siten, että $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)| \leq C$, mikä on yhdenpitävä sen kanssa, että $F(a) \in S^0$. Aloitetaan osoittamalla, että induktion alkuaskel toimii. Kun funktiota $F(a)$ osittaisderivoidaan muuttujien x_j ja ξ_j suhteen, missä $j \in \{1, \cdots, n\}$, saadaan että

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_j} = \sum_{v=1}^{k} \frac{\partial F(a)}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial F(a)}{\partial \xi_j} = \sum_{v=1}^{k} \frac{\partial F(a)}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \xi_j}. \tag{4.1}$$

Koska $\frac{\partial F(z)}{\partial z_v} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ ja $a_v \in S^0$, edeltävän perusteella voidaan päätellä, että on olemassa vakio $C > 0$ siten, että $\left|\frac{\partial F(a)}{\partial a_v}\right| \leq C$ kaikilla $v \in \{1, \cdots, k\}$. Siitä että $a_v \in S^0$, voidaan päätellä että $\frac{\partial a_v}{\partial x_j} \in S^0$ ja $\frac{\partial a_v}{\partial \xi_j} \in S^{-1}$.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi jolle pätee $|\alpha| = 1$. Tällöin edeltävän päättelyn nojalla on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|\partial_x^\alpha F(a)| \leq \sum_{v=1}^{k} \left|\frac{\partial F(a)}{\partial a_v}\right| \left|\partial_x^\alpha a_v\right| \leq C. \tag{4.2}$$

Olkoon sitten $\beta \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi jolle pätee $|\beta| = 1$. Samoin kuin edellä, voidaan nyt päätellä että on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|\partial_\xi^\beta F(a)| \leq \sum_{v=1}^{k} \left|\frac{\partial F(a)}{\partial a_v}\right| \left|\partial_\xi^\beta a_v\right| \leq C\langle\xi\rangle^{-1}. \tag{4.3}$$

Tällöin päätelmät voidaan vetää yhteen seuraavalla tavalla. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksejä joilla $|\alpha + \beta| = 1$. Tällöin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)| \leq C. \tag{4.4}$$

Näin ollen induktion alkuaskel toimii.

Tehdään induktio-oletus ja oletetaan, että on olemassa luku $L \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla multi-indekseillä $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, joilla $|\alpha + \beta| = L$, on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)| \leq C. \tag{4.5}$$

Yritetään nyt osoittaa, että induktio-askel voidaan ottaa. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksejä, joilla $|\alpha + \beta| = L + 1$. Tällöin

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a) = \partial_{x_j} \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^\beta F(a), \quad \text{missä } |\alpha' + \beta| = L, \tag{4.6}$$

tai

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a) = \partial_{\xi_j} \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^\beta F(a), \quad \text{missä } |\alpha + \beta'| = L. \tag{4.7}$$

Kirjoitetaan että $\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^\beta F(a) = G(a)$ ja $\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta'} F(a) = H(a)$. Tällöin saadaan että

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a) = \partial_{x_j} G(a) \tag{4.8}$$

tai

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a) = \partial_{\xi_j} H(a). \tag{4.9}$$

Induktio-oletuksen nojalla voidaan päätellä, että on olemassa vakiot $C, C' > 0$ siten, että $\frac{\partial G(a)}{\partial a_v} \leq C$ ja $\frac{\partial H(a)}{\partial a_v} \leq C'$. Tällöin saadaan että

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)| = \sum_{v=1}^{k} \Big|\frac{\partial G(a)}{\partial a_v}\Big|\Big|\frac{\partial a_v}{\partial x_j}\Big| \leq C \tag{4.10}$$

tai

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(a)| = \sum_{v=1}^{k} \Big|\frac{\partial G(a)}{\partial a_v}\Big|\Big|\frac{\partial a_v}{\partial \xi_j}\Big| \leq C\langle \xi \rangle^{-1}. \tag{4.11}$$

Tulos (4.10) pätee molemmissa tapauksissa, joten induktio-askel toimii. Näin ollen induktiolla voidaan päätellä, että $F(a) \in S^0$. Lause on siten todistettu.

□

Aloitetaan ns. L^2-teorian läpi käyminen lemmalla, joka kulkee kirjallisuudessa nimellä Schurin Lemma. Taylorin kirjassa Schurin lemma on muotoiltu L^p-normeille, mutta koska tässä gradussa tarvitaan vain L^2-normeja, niin muotoillaan ja todistetaan lause vain L^2-normeille.

Lemma 4.1.2. (Schurin Lemma) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $k(x, y)$ on mitallinen funktio avaruudessa $\mathbb{R}^{2n}$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| dx \leq C_1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)| dy \leq C_2 \tag{4.12}$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin ytimen $k(x, y)$ avulla määritellylle integraalioperaattorille

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) u(y) d\mu(y), \tag{4.13}$$

on olemassa jatkuva jatke avaruuteen $L(\mathbb{R}^n)$. Jatkeelle, jota merkitsemme myös kirjaimella T, on olemassa seuraava L^2-normi:

$$\|Tu\|_{L^2} \leq C_1^{\frac{1}{2}} C_2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2}. \tag{4.14}$$

Todistus. Olkoon $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ytimen ominaisuuksista (4.12) seuraa, että $\|k(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$ on äärellinen. Tämän avulla voidaan osoittaa, että integraali (4.13) on absoluuttisesti integroituva, sillä

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)u(y)|dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|^{1/2}|k(x,y)|^{1/2}|u(y)|dy \\
&\leq \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dy\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||u(y)|^2dy\Big)^{1/2} \\
&\leq C_2^{1/2}\|k(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} < \infty.
\end{aligned}$$

Tulos (4.14) voidaan johtaa samaan tapaan. Päätellään ensin, että

$$\begin{aligned}
\big|Tu(x)\big| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||u(y)|dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|^{\frac{1}{2}}|k(x,y)|^{\frac{1}{2}}|u(y)|dy \\
\leq \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dy\Big)^{\frac{1}{2}}&\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||u(y)|^2dy\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq C_2^{1/2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||u(y)|^2dy\Big)^{\frac{1}{2}},&
\end{aligned}$$

josta saadaan L^2-normi

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|Tu(x)\big|^2dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||u(y)|^2dydx = C_2\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|dxdy \\
&\leq C_1C_2\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2dy = C_1C_2\|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Näin lemman väite on todistettu.

□

Schurin Lemmaa käytetään tilanteessa, jossa k on Schwartzin ydin pseudodifferentiaalioperaattorille $p(x,D) \in S^m_{1,0}$. Esitellään tulos, jonka avulla voimme jatkossa soveltaa Schurin lemmaa pseudodifferentiaalioperaattoreiden ytimille.

Lemma 4.1.3. Olkoon $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, missä $m < -1$. Pseudodifferentiaalioperaattorin T_σ ytimelle $K(x,y)$ pätee kaksi seuraavaa epäyhtälöä.

Kun $|x-y| < 1$, niin tällöin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|K(x, x-y)| \le C|x-y|^{-(n-1)}. \tag{4.15}$$

Kun $|x-y| \ge 1$, niin tällöin kaikilla $N > m+n$, on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|K(x, x-y)| \le C|x-y|^{-N}. \tag{4.16}$$

Todistus. Muistetaan että ydin on oskilloiva integraali

$$K(x, x-y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi.$$

Olkoon $\varphi(x,y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ja olkoon $\mathcal{X}(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\mathcal{X}(0) = 1$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (x-y)^\alpha K(x,x-y)\varphi(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (x-y)^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi \varphi(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi \varphi(x,y)dxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)\mathcal{X}(\epsilon\xi) d\xi \varphi(x,y)dxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha \big(p(x,\xi)\mathcal{X}(\epsilon\xi)\big) d\xi \varphi(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha p(x,\xi) d\xi \varphi(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

Yllä olevassa päättelyssä φ oli mielivaltainen Schwartzin funktio, joten voidaan päätellä, että kaikilla multi-indekseillä $\alpha \in \mathbb{N}^n$ pätee

$$\begin{aligned}
(x-y)^\alpha K(x,x-y) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (x-y)^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi \\
&= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha p(x,\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

missä integraali on määritelty distribuutiona. Näin ollen kaikilla multi-indekseillä $\alpha \in \mathbb{N}^n$, missä $|\alpha| > m+n$, on olemassa vakio $C' > 0$ siten, että

$$|x-y|^{|\alpha|}|K(x,x-y)| \le C \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} d\xi \le C'.$$

Kun $|x-y| \geq 1$, niin tällöin kaikilla $N > m+n$, on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|K(x, x-y)| \leq C|x-y|^{-N}. \tag{4.17}$$

Kun $|x-y| < 1$, voidaan multi-indeksi α valita siten, että $|\alpha| = n-1$. Tällöin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|K(x, x-y)| \leq C|x-y|^{-(n-1)}. \tag{4.18}$$

□

Schurin Lemman ja lemman 4.1.3 avulla voidaan todistaa seuraava lause.

Lemma 4.1.4. Jos $p(x, D) \in S^m_{1,0}$ ja $m < -1$, niin tällöin

$$p(x, D) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.19}$$

Todistus. Lemman 4.1.3 tuloksista (4.15) ja (4.16) seuraa, että pseudodifferentiaalioperaattorin $p(x, D) \in S^m_{1,0}$ Schwartzin ytimelle K on olemassa vakiot $C_1 > 0$ ja $C_2 > 0$ siten, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dx \leq C_1, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dy \leq C_2. \tag{4.20}$$

Pseudodifferentiaalioperaattori voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(x, D)u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x, x-y)u(y)dy. \tag{4.21}$$

Kun tämän tiedon yhdistää tulokseen (4.20), joka on Schurin Lemman oletus, niin Schurin Lemman nojalla kaikilla $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$\|p(x, D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1^{1/2} C_2^{1/2} \|u\|_{L2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.22}$$

mikä on lemman väite. Lemma on siten todistettu.

□

Juuri todistetun lemman tulosta voidaan kuitenkin parantaa. Lemmassa oletettiin, että pseudodifferentiaalioperaattorin symboliluokan S^m määräävälle asteelle $m \in \mathbb{R}$ pätee $m < -1$. Seuraavaksi osoitetaan, että symboliluokan S^0 määräämille pseudodifferentiaalioperaattoreille pätee lemman 4.1.4 tulos (4.19). Tätä tulsota tarvitaan Gårdingin epäyhtälön todistuksessa.

Lause 4.1.5. Jos $p(x, D) \in S^0$, niin tällöin

$$p(x, D) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.23}$$

Todistusta varten tarvitaan kuitenkin vielä toinen lemma.

Lemma 4.1.6. Jos $p(x, D) \in S^{-a}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, missä $a > 0$, niin tällöin (4.23) on voimassa.

Todistus. Kun $p(x, \xi) \in S^{-a}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, niin pseudodifferentiaalioperaattoreiden adjungaattiin liittyvän lauseen 3.2.2 nojalla $p^*(x, \xi)$ kuuluu myös luokkaan $S^{-a}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Lisäksi tulo-operaattoreihin liittyvän lauseen 3.1.2 nojalla $p^*(x, \xi)p(x, \xi)$ kuuluu luokkaan $S^{-2a}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Edelleen kun k on positiivinen kokonaisluku, niin $\big(p^*(x, \xi)p(x, \xi)\big)^k$ kuuluu luokkaan $S^{-2ka}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Kun k valitaan tarpeeksi suureksi niin lemman 4.1.4 nojalla

$$\big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^k : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.24}$$

Osoitetaan matemaattisella induktiolla, että lukua k voidaan pienentää niin, että (4.24) edelleen pätee. Valitaan positiivinen kokonaisluku k siten, että $k = 2^n$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n ja että (4.24) on voimassa. Lähdetään nyt jakamaan lukua k luvulla 2 ja osoitetaan, että uusi operaattori kuvaa edelleen avaruuteen $L^2(\mathbb{R}^n)$. Olkoon $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ja lasketaan

$$\begin{aligned}
\|\big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^{k/2} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \Big(\big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^{k/2} u, \big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^{k/2} u\Big) \\
&= \Big(\big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^{k} u, u\Big) \\
&\leq \Big\|\big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^{k} u\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty,
\end{aligned}$$

joten

$$\big(P(x, D)^* P(x, D)\big)^{k/2} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.25}$$

Näin ollen induktion alkuaskel toimii. Tällöin on induktiivisesti todistettu, että (4.24) on voimassa myös potenssilla $k/2^n = 1$ eli

$$P(x, D)^* P(x, D) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.26}$$

Nyt (4.26):sta seuraa, että

$$\big\|P(x, D)u\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \big(P(x, D)^* P(x, D)u, u\big) \leq \big\|P(x, D)^* P(x, D)u\big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

missä $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen lemma on todistettu.

□

Nyt juuri todistetun lemman 4.1.6 avulla voimme todistaa lauseen 4.1.5.

Todistus. (Lauseen 4.1.5 todistus.) Määritellään $q(x, D) := p(x, D)^* p(x, D) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, missä $p(x, D)^*$ on operaattorin $p(x, D)$ adjungaatti. Koska $g(x, \xi) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, niin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|q(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^0 \leq C, \tag{4.27}$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$. Näin ollen on olemassa vakiot $M > 0$ ja $b > 0$ siten, että $|g(x, \xi)| \leq M - b$, josta saadaan

$$M - \operatorname{Re} q(x, \xi) \geq b > 0 \tag{4.28}$$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$. Muistetaan, että $\operatorname{Re} g(x, \xi) = \frac{1}{2}(q(x, \xi) + \overline{q}(x, \xi))$ ja määritellään

$$A(x, \xi) := \big(M - \operatorname{Re} g(x, \xi)\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.29}$$

Lauseen 4.1.1 nojalla $A(x, \xi) \in S^0$. Adjungaatin asymptoottisen kehitelmän ja tulo-operaattoriin liittyvän asymptoottisen kehitelmän nojalla

$$A^*(x, \xi) A(x, \xi) = \overline{A}(x, \xi) A(x, \xi) + r(x, \xi), \tag{4.30}$$

missä $A^*(x, \xi)$ on adjungaatin symboli. $\overline{A}(x, \xi) A(x, \xi)$ on ns. päätermi ja se kuuluu symboliluokkaan $S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, koska $A(x, \xi) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Symboli $r(x, \xi)$ käsittää asymptoottisen kehitelmän alempien kertaluokkien symbolit. On selvää, että $r(x, \xi) \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Tehdään vielä yksi havainto. Nimittäin

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} q(x, \xi) &= \operatorname{Im}\Big(\frac{p^*(x, \xi) p(x, \xi)}{2}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\frac{\overline{p(x, \xi)} p(x, \xi) + r_2(x, \xi)}{2}\Big) \\ &= \Big(\frac{\overline{p(x, \xi)} p(x, \xi) + r_2(x, \xi)}{2}\Big) - \overline{\Big(\frac{\overline{p(x, \xi)} p(x, \xi) + r_2(x, \xi)}{2}\Big)} \\ &= \frac{r_2(x, \xi) - \overline{r_2(x, \xi)}}{2} = \operatorname{Im}\Big(r_2(x, \xi)\Big), \end{aligned} \tag{4.31}$$

missä $r_2(x, \xi)$ on tulosymbolin $p^*(x, \xi) p(x, \xi)$ asymptoottisen kehitelmän päätermiä alemmat termit; päätermi on tietenkin $\overline{p(x, \xi)} p(x, \xi)$. Symboli $r_2(x, \xi)$ kuuluu symboliluokkaan $S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, joten kaavan (4.31) nojalla $\operatorname{Im} q(x, \xi)$ kuuluu symboliluokkaan $S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Symbolille $A^*(x, \xi) A(x, \xi)$ pätee

$$\begin{aligned} A^*(x, \xi) A(x, \xi) &= \overline{A(x, \xi)} A(x, \xi) + r(x, \xi) \\ &= \overline{\Big(M - \operatorname{Re} q(x, \xi)\Big)^{1/2}} \Big(M - \operatorname{Re} q(x, \xi)\Big)^{1/2} + r(x, \xi) \end{aligned}$$

$$= M - \operatorname{Re} q(x,\xi) + r(x,\xi) = M - q(x,\xi) + \operatorname{Im} q(x,\xi) + r(x,\xi)$$

$$= M - q(x,\xi) + r'(x,\xi), \tag{4.32}$$

missä $r'(x,\xi) = \operatorname{Im} q(x,\xi) + r(x,\xi)$ kuuluu symboliluokkaan $S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Kaavan (4.32) nojalla

$$\begin{aligned} M\|u\|^2_{L^2} - \|p(X,D)u\|^2_{L^2} &= M(u,u) - \big(p(x,D)^* p(x,D)u, u\big) \\ &= \big((M - q(x,D))u, u\big) = \big((A(x,D)^* A(x,D) - r'(x,D))u, u\big) \\ &= \|A(X,D)u\|^2_{L^2} - \big(r(x,D))u, u\big) \geq -\big(r(x,D))u, u\big) \qquad (4.33) \\ &\overset{\text{Lemma4.1.6}}{\geq} -C\|u\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

joka on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\|p(X,D)u\|^2_{L^2} \leq (C+M)\|u\|^2_{L^2} < \infty, \tag{4.34}$$

mikä onkin lauseen väite.

□

Esitellään seuraavaksi pseudodifferentiaalioperaattori Λ^s, jonka symboli on $\langle\xi\rangle^s := (1+|\xi|^2)^{s/2}$.

Määritelmä 4.1.7.

$$\Lambda^s u = \Lambda^s(x,D)u := \int e^{ix\cdot\xi}\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)d\xi. \tag{4.35}$$

Esimerkissä 2.15 osoitettiin, että $\Lambda^s(x,\xi) = \langle\xi\rangle^s$ kuuluu symboliluokkaan $S^s_{1,0}$. Operaattorin Λ^s käänteisoperaattori on Λ^{-s}.

Lause 4.1.8. Olkoon $s \in \mathbb{R}$. Operaattoreiden $\Lambda^{-s}(x,D)$ ja $\Lambda^s(x,D)$ tulo-operaattori on identtinen kuvaus $I : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Olkoon $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin määritelmän 4.1.7 nojalla

$$\begin{aligned} \Lambda^s(x,D)u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)d\xi = \Big(\mathscr{F}^{-1}\big(\langle\xi\rangle^s\big) * \mathscr{F}^{-1}\big(\widehat{u}(\xi)\big)\Big)(x) \\ &= \Big(\mathscr{F}^{-1}\big(\langle\xi\rangle^s\big) * u\Big)(x). \end{aligned}$$

Yllä olevan nojalla tulo-operaattoriksi saadaan

$$\big(\Lambda^{-s}\Lambda^s\big)(x,D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\langle\xi\rangle^{-s}\mathscr{F}\Big[\Lambda^s(x,D)u(x)\Big](\xi)d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\langle\xi\rangle^{-s}\mathscr{F}\Big[\Big(\mathscr{F}^{-1}\big(\langle\xi\rangle^s\big) * u\Big)(x)\Big](\xi)d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^s\widehat{u}(\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)d\xi = u(x).$$

Näin ollen $\Lambda^{-s}\Lambda^s = I$. Sama tulos voidaan laskea tulolle $\Lambda^s\Lambda^{-s}$.

□

Lause voidaan todistaa myös L^2-avaruuden funktioille, mutta todistus sivuutetaan.

Lause 4.1.9. Olkoon $s \in \mathbb{R}$. Operaattoreiden $\Lambda^{-s}(x, D)$ ja $\Lambda^s(x, D)$ tulo-operaattori on identtinen kuvaus $I : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Operaattori Λ^s toimii siten, että $\big(\Lambda^s u\big)(x)$ on käänteinen Fourier-muunnos funktiosta $(1 + |\xi|^s)^{s/2}\widehat{u}(\xi)$. Mikäli $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, niin $\widehat{u}(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ja tällöin myös $(1 + |\xi|^s)^{s/2}\widehat{u}(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Koska Fourier-muunnos on bijektio avaruudessa $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, niin on olemassa yksikäsitteinen $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ siten, että $v = \big(\Lambda^s u\big)(x)$. Sama pätee myös kääntäen, eli kaikilla $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on olemassa yksikäsitteinen $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ siten, että $v = \big(\Lambda^s u\big)(x)$.

Sobolev-avaruudet $H^s(\mathbb{R}^n)$ voidaan määritellä seuraavasti

Määritelmä 4.36. Sobolev-avaruus H^s määritellään siten, että

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \langle\xi\rangle^s\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{4.37}$$

Tälle voidaan antaa yhtäpitävä määritelmä

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s}L^2(\mathbb{R}^n) = \{\Lambda^{-s}(x, D)u(x) : u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{4.38}$$

Määritelmän 4.38 nojalla jokainen Sobolev-avaruuden $H^s(\mathbb{R}^n)$ funktio voidaan esittää $L^2(\mathbb{R}^n)$-avaruuden funktion avulla käyttäen operaattoria Λ^{-s}.

Korollaari 4.39. *Kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on voimassa, että*

$$\|\Lambda^{-s}(x, D)f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.40}$$

Todistus. Olkoon $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Lasketaan Sobolev-funktion $\Lambda^{-s}(x, D)f(x)$ Sobolev-normi $\|\Lambda^{-s}(x, D)f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Määritelmästä (4.37) saadaan seuraava tulos.

$$\|\Lambda^{-s}(x, D)f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s\Big|\mathscr{F}\Big(\Lambda^{-s}(x, D)f(x)\Big)(\xi)\Big|^2 d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \Big| \mathscr{F}\Big(\mathscr{F}^{-1}\big(\langle\xi\rangle^{-s}\big) * f \Big)(\xi) \Big|^2 d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \big| \langle\xi\rangle^{-s} \widehat{f}(\xi) \big|^2 d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s (1+|\xi|^2)^{-s} \big| \widehat{f}(\xi) \big|^2 d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big| \widehat{f}(\xi) \big|^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

Näin ollen Plancherelin kaavan nojalla

$$
\|\Lambda^{-s}(x,D)f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.41}
$$

□

Lisätietoa Sobolev-avaruuksista löytyy esimerkiksi Evansin kirjasta [2] tai Taylorin kirjasarjan ensimmäisestä osasta [21]. Tarkastellaan vielä Sobolev-avaruuksiin liittyen yhtä lemmaa, jota tarvitaan Gårdingin epäyhtälön todistamiseen. Lemma on viimeinen ennen Gårdingin epäyhtälöä. Tämä lemma on hyvin tärkeä, sillä sen avulla todistetaan sekä Gårdingin epäyhtälö että tarkka Gårdingin epäyhtälö. Lemman mukaan luokkaan S^m kuuluva pseudodifferentiaalioperaattori kuvaa Sobolev-avaruuden H^s avuuruuteen H^{s-m}.

Lemma 4.1.10. Olkoot $m, s \in \mathbb{R}$. Jos $p(x,D) \in S^m_{1,0}$, niin

$$
p(x,D) : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n), \tag{4.42}
$$

on jatkuva.

Todistus. Sobolev-avaruuden määritelmän 4.38 nojalla (4.42) on voimassa, mikäli

$$
\big(\Lambda^{s-m}p\big)(x,D)u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{4.43}
$$

kaikilla $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Määritelmän (4.38) nojalla jokaisella $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ on olemassa $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ siten, että

$$
u(x) = \Lambda^{-s}(x,D)v(x). \tag{4.44}
$$

Tällöin tulos (4.43) on yhtäpitävä tuloksen

$$
\big(\Lambda^{s-m}p\Lambda^{-s}\big)v(x) \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \text{missä } v \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{4.45}
$$

kanssa. Lemma todistamiseen riittää siten osoittaa (4.45). Nyt $\big(p\Lambda^{-s}\big)(x,D)$ on pseudodifferentiaalioperaattori, jonka symbolin $\big(p\Lambda\big)(x,\xi)$ päätermi on lauseen 3.1.2 nojalla

$$
p(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-s} \in S^{-s+m}_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), \tag{4.46}
$$

ja jäännöstermi on $r(x,\xi)$, joka kuuluu symboliluokkaan $S_{1,0}^{-s+m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Symbolin $\big(\Lambda^{s-m}p\Lambda^{-s}\big)(x,\xi)$ päätermi on

$$\langle\xi\rangle^{s-m}p(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-s} = p(x,\xi)\langle\xi\rangle^{m} \in S_{1,0}^{0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), \tag{4.47}$$

ja jäännöstermi on $r'(x,\xi) \in S_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Tällöin operaattorin $\big(\Lambda^{s-m}p\Lambda^{-s}\big)(x,D)$ päätermi että jälkitermi määrittelevät pseudodifferentiaalioperaattorin, joka lemman 4.1.6 ja lauseen 4.1.5 nojalla kuvaa L^2-funktiot avaruuteen L^2. Näin ollen operaattori $\big(\Lambda^{s-m}p\Lambda^{-s}\big)(x,D)$ kuvaa L^2-funktiot avaruuteen L^2.

Olkoon $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Tällöin Sobolev-avaruuden määritelmän nojalla on olemassa $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ siten, että $u = \Lambda^{-s}(x,D)v$. Lauseen 4.23 ja Sobolev-normin määritelmän nojalla on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\|p(x,D)u\|_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} = \|\big(\Lambda^{s-m}p\Lambda^{-s}\big)(x,D)v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

sillä $\Lambda^{s-m}p\Lambda^{-s} \in S^0$. Kun vielä sovelletaan lausetta 4.1.9 niin saadaan

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\big(\Lambda^{s}\Lambda^{-s}\big)(x,D)v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\|\Lambda^{s}(x,D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

joten

$$\|p(x,D)u\|_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.48}$$

□

Nyt voidaan edetä Gårdingin epäyhtälöön.

4.2 Gårdingin epäyhtälö

Seuraavaksi esitellään Gårdingin epäyhtälönä tunnettu lause. Ensimmäisen kerran lause julkaistiin artikkelissa [7]. Lauseen ehtona pseudodifferentiaalioperaattorilta odotetaan ns. sanottua vahvaa ellipitisyyttä. Epäyhtälö on niin sanottu energiaestimaatti. Lause antaa alarajan pseudodifferentiaalioperaattoriin liittyvälle bilineaarimuodolle. Tälläisillä alarajoilla voidaan saada estimaatteja pseudodifferentiaailoperaattoreille ja Gårdingin epäyhtälöä käytetäänkin esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden heikkojen ratkaisuiden etsimisessä. Tämä todistus perustuu Taylorin kirjassa [22] olevaan todistukseen.

Lause 4.2.1. Oletetaan, että $p(x,D) \in S_{1,0}^{m}$ ja että

$$Re\, p(x,\xi) \geq C|\xi|^m, \quad \text{kun } |\xi| \text{ on tarpeeksi suuri.} \tag{4.49}$$

Tällöin millä tahansa $s \in \mathbb{R}$ on olemassa vakiot $C_0, C_1 > 0$ siten, että kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$Re\,\big(p(x,D)u,u\big) \geq C_0\|u\|_{H^{m/2}}^2 - C_1\|u\|_{H^s}^2. \tag{4.50}$$

Todistus. Korvaamalla operaattorin $p(x,D)$ operaattorilla $\Lambda^{-m/2}p\Lambda^{-m/2}(x,D)$ voidaan olettaa että $m = 0$. Kun $u \in H^{m/2}(\mathbb{R}^n)$, niin on olemassa $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ siten, että $u = \Lambda^{-m/2}(D)v$. Näin ollen sisätulo $\big(p(x,D)u,u\big)_{H^{m/2}(\mathbb{R}^n)}$ voidaan kirjoittaa toisella tavalla

$$\begin{aligned}\big(p(x,D)u,u\big)_{H^{m/2}(\mathbb{R}^n)} &= \big(p(x,D)\Lambda^{-m/2}(D)v,\Lambda^{-m/2}(D)v\big)_{H^{m/2}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \big(\Lambda^{-m/2}(D)p(x,D)\Lambda^{-m/2}(D)v,v\big)_{H^0(\mathbb{R}^n)} = \big(p_0(x,D)v,v\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

missä $p_0(x,D) = \Lambda^{-m/2}(D)p(x,D)\Lambda^{-m/2}(D) \in S^0$. Viimeisessä sisätulossa on L^2-sisätulo siitä yksinkertaisesta syystä, että $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen lause voidaan todistaa olettaen, että $m = 0$. Huomataan, että tämä vaikuttaa myös funktion u Sobolev-luokkaan, sillä $u \in H^{m/2}(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$, kun $m = 0$.

Määritellään symboli $A(x,\xi)$ aivan kuten lauseen (4.1.5) todistuksessa

$$A(x,\xi) := \big(\mathrm{Re}\, p(x,\xi) - \frac{1}{2}C\big)^{1/2}.$$

Tälle symbolille pätee $A(x,\xi) \in S^0$ lauseen 4.1.1 nojalla. Tästä voidaan päätellä jotain liittyen pseudodifferentiaalioperaattorista $A(x,D)^*$, nimittäin lauseen 3.2.2 nojalla

$$A(x,\xi)^* \sim \sum_{\mu} \frac{(-i)^{\mu}}{\mu!}\big(\partial_x^{\mu}\partial_{\xi}^{\mu}\overline{A}(x,\xi)\big), \tag{4.51}$$

jolloin

$$A(x,\xi)^* = \overline{A}(x,\xi) + r_1(x,\xi), \tag{4.52}$$

missä $r_1(x,\xi) \in S^{-1}$ on jäännöstermi. Tämän avulla voidaan jatkaa päättelyä pseudodifferentiaalioperaattorista $A(x,D)A(x,D)^*$. Merkitään operaattorin $A(x,D)A(x,D)^*$ symbolia termillä $\lambda_{AA^*}(x,\xi)$. Lauseen 3.1.2 nojalla

$$\lambda_{AA^*}(x,\xi) \sim \sum_{\mu} \frac{(-i)^{\mu}}{\mu!}\big(\partial_{\xi}^{\mu}A\big)\big(\partial_x^{\mu}A^*\big)(x,\xi), \tag{4.53}$$

jolloin

$$\lambda_{AA^*}(x,\xi) - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{\mu}}{\mu!}\big(\partial_{\xi}^{\mu}A\big)\big(\partial_x^{\mu}A^*\big)(x,\xi), \tag{4.54}$$

kuuluu symboliluokkaan S^{-N}. Valitsemalla $N = 1$ saadaan (4.52):n nojalla

$$\lambda_{AA^*}(x,\xi) = A(x,\xi)A^*(x,\xi) + r_2(x,\xi)$$

$$= A(x,\xi)\overline{A}(x,\xi) + A(x,\xi)r_1(x,\xi) + r_2(x,\xi), \tag{4.55}$$

missä $r_2(x,\xi)$ ja $A(x,\xi)r_1(x,\xi)$ kuuluvat symboliluokkaan S^{-1}. Merkitään näitä symboleita samalla tunnuksella, eli

$$r_3(x,\xi) = A(x,\xi)r_1(x,\xi) + r_2(x,\xi). \tag{4.56}$$

Muistetaan, että

$$A(x,\xi) = \big(\operatorname{Re} p(x,\xi) - \frac{1}{2}C\big)^{1/2},$$

jolloin kaavaan (4.55) sijoitettuna saadaan

$$\lambda_{AA^*}(x,\xi) = \operatorname{Re} p(x,\xi) - \frac{1}{2}C + r_3(x,\xi). \tag{4.57}$$

Lauseen väite koskee kuitenkin sisätulon reaaliosaa, joten pitäisi pystyä siirtymään symbolin reaaliosasta sisätulon reaaliosaan. Yhdestä päästään toiseen seuraavasti lauseen 3.2.2 avulla

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\big(p(x,D)u,u\big) &= \frac{1}{2}\big(p(x,D)u,u\big) - \frac{1}{2}\overline{\big(p(x,D)u,u\big)} \\
&= \frac{1}{2}\big(p(x,D)u,u\big) - \frac{1}{2}\big(p(x,D)^*u,u\big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(p(x,D)u,u\Big) - \frac{1}{2}\Big(\big(\overline{p}(x,D) + r_4(x,D)\big)u,u\Big) \\
&= \Big(\operatorname{Re} p(x,D)u,u\Big) - \Big(r_4(x,D)u,u\Big),
\end{aligned}$$

missä $r_4(x,D) \in S^{-1}$. Todistuksen väite koski sisätuloa $Re\,\big(p(X,D)u,u\big)$, joten katsotaan nyt mitä siitä voidaan päätellä

$$\begin{aligned}
Re\big(p(x,D)u,u\big) &= \big(Re\,p(x,D)u,u\big) - \big(r_4(x,D)u,u\big) \\
&= \Big(\big(A(x,D)^*A(x,D) + \frac{1}{2}C - r_3(x,D)\big)u,u\Big) - \big(r_4(x,D)u,u\big).
\end{aligned}$$

Merkitään vielä $r_5(x,D) = r_3(x,D) + r_4(x,D)$. Tällä tavalla merkittynä saadaan

$$\begin{aligned}
|Re\big(p(x,D)u,u\big)| &\geq \|A(x,D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - |\big(r_5(x,D)u,u\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}| \\
&\geq \frac{1}{2}C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - |\big(\Lambda^{-s}r_5(x,D)u,\Lambda^s u\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}| \\
&\geq \frac{1}{2}C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - C_1\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|r_5(x,D)u\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2}C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - C_1'\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^{-s-1}(\mathbb{R}^n)}$$

Valitaan $s = -1/2$ jolloin yllä olevasta saadaan

$$Re\big(p(x,D)u,u\big) \geq \frac{1}{2}C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - C_1'\|u\|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Sobolev-normin määritelmän nojalla $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \geq \|u\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^n)}$, kun $s > -1/2$. Tällöin epäyhtälö (4.50) on voimassa kaikilla $s > -1/2$. Kaikilla $s < -1/2$ on olemassa vakiot $\epsilon, C_\epsilon > 0$ siten, että $\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_\epsilon\|u\|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^n)}$. Tätä epäyhtälöä käyttäen voidaan osoittaa, että (4.50) on voimassa myös kun $s < -1/2$.

Näin ollen olemme osoittaneet, että kaikilla $s \in \mathbb{R}$, on olemassa vakiot $C, C_1 > 0$ siten että

$$\text{Re}\,\big(p(x,D)u,u\big) \geq \frac{1}{2}C\|u\|_{L^2} - C_1\|u\|^2_{H^s}. \tag{4.58}$$

Tämä on lauseen väite ja lause on siten todistettu.

□

Tämä alkuperäisestä Gårdingin epäyhtälöstä. Siirrytään seuraavaksi käsittelemään Hörmanderin esittelemää tarkkaa Gårdingin epäyhtälöä.

4.3 Tarkka Gårdingin epäyhtälö

Seuraavaksi esitellään luvun 4 päätulos eli lause nimeltä tarkka Gårdingin epäyhtälö. Lause heikentää edellisen lauseen estimaattiin siinä mielessä, että toinen normeista jää pois. Toisaalta, tarkassa Gårdingin epäyhtälössä operaattorilta ei vaadita vahvaa elliptisyyttä. Ensimmäisen todistuksen tälle lauseelle esitti L. Hörmander artikkelissaan [11]. Lax ja Nirenberg kehittivät tulosta jo samana vuonna 1966 siten, että lause pätee vektoriarvoiselle funktiolle [14]. Tarkan Gårdingin epäyhtälön osalta myös lähteet [5] ja [24] saattaisivat kiinnostaa lukijaa. Tässä esityksessä lause käsitellään ainoastaan skalaaritilanteessa ja lukija tutustukoon oma-aloitteisesti vektoritapaukseen. Lisäksi voidaan sanoa, että tässä esityksessä lause todistetaan ainoastaan luokan $S^m_{1,0}$ pseudodifferentiaalioperaattoreille, vaikka lause pätee myös laajammalle $S^m_{\rho,\delta}$-luokan, missä $0 < \delta \leq \rho \leq 1$, pseudodifferentiaalioperaattoreille. Hörmanderin kirjassa on maininta lauseen todistuksesta myös tälle laajemmalle operaattoriluokalle.

Tarkka Gårgingin epäyhtälö ei ole vielä menettänyt tutkijoiden kiinnostusta, vaan Lieryhmillä Gårdingin epäyhtälö on edelleen aktiivinen tutkimuskohde. Kompakteilla Lieryhmillä tarkka Gårdingin epäyhtälö ratkaistiin vuonna 1989 artikkelissa [1]. Kuitenkin

Ruzhansky ja Turunen pystyivät vielä parantamaan tulosta ja julkaisivat vuonna 2011 artikkelin [17].

Todistus, joka tässä esitellään, perustuu Hörmanderin kirjasarjan, The analysis of linear partial differential operators, kolmannessa osassa olevaan todistukseen [10] (kts. sivu 76, Lause 18.1.14). Myös Gerald Follandin [4] ja Trevesin [23] kirjoissa on todistus tarkalle Gårdingin epäyhtälölle.

Lause 4.3.1. (Tarkka Gårdingin epäyhtälö) Jos $a \in S^{2m+1}$ ja $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$, niin on olemassa $C > 0$ siten, että

$$\operatorname{Re}\big(a(x,D)u,u\big)_{L^2} \geq -C\|u\|^2_{H^m}, \quad \text{kaikilla } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.59}$$

Aloitetaan lemmalla, jonka mukaan tarkka Gårdingin epäyhtälö toteutuu kun $a(x,\xi) \in S^{2m}$.

Lemma 4.3.2. Jos $a \in S^{2m}$, niin (4.59) on voimassa kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Osoitetaan että väite seuraa Lemmasta 4.1.10. Olkoon $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ jolloin

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Re}(a(x,D)u,u) &= -\frac{1}{2}[(a(x,D)u,u) + \overline{(a(x,D)u,u)}] \\
&= -\frac{1}{2}(a(x,D)u,u) - \frac{1}{2}(u,a(x,D)u) \\
&= \Big((-\frac{1}{2}a(x,D) - \frac{1}{2}a^*(x,D))u,u\Big) \\
&\leq C\|(-\frac{1}{2}a(x,D) - \frac{1}{2}a^*(x,D))u\|_{H^{-m}}\|u\|_{H^m} \\
&\overset{lemma(4.1.10)}{\leq} C'\|u\|^2_{H^m},
\end{aligned}$$

josta saadaan kertomalla epäyhtälö luvulla -1

$$\operatorname{Re}(a(x,D)u,u) \geq -C'\|u\|^2_{H^m}.$$

Joten tarkka Gårdingin epäyhtälö on voimassa, kun $a \in S^{2m}$.

□

Määritellään, että $(\operatorname{Re} a) = (\operatorname{Re} a)(x,D)$ on pseudodifferentiaalioperaattori, jonka symboli on $\operatorname{Re} a(x,\xi)$. Tarkassa Gårdingin epäyhtälössä (4.59) epäyhtälön oikeapuoli voidaan esittää seuraavasti:

$$\operatorname{Re}(a(x,D)u,u) = \Big(\Big(\frac{a(x,D)+a^*(x,D)}{2} - \big(\operatorname{Re}a\big)(x,D)\Big)u,u\Big) + \Big(\big(\operatorname{Re}a\big)(x,D)u,u\Big).$$

Näin ollen tarkan Gårdingin epäyhtälön tarkastelu voidaan jakaa kahteen osaan. Voidaan osoittaa, että summan ensimmäinen osa määrittelee pseudodifferentiaalioperaattorin, jonka symboli kuuluu luokkaan S^{2m}.

Lemma 4.3.3. Jos $a \in S^{2m+1}$ ja $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$, niin operaattorin

$$\frac{a(x,D) + a(x,D)^*}{2} - \big(\mathrm{Re}a\big)(x,D) \tag{4.60}$$

symboli kuuluu luokkaan S^{2m}.

Todistus. Käyttämällä adjungaatin $a(x,D)^*$ asymptoottista kehitelmää, saadaan ratkaistua päätermi operaattorille

$$\frac{a(x,D) + a(x,D)^*}{2} - \big(\operatorname{Re} a\big)(x,D). \tag{4.61}$$

Asymptoottisen kehtelmän mukaan

$$a^*(x,\xi) = \overline{a}(x,\xi) + r(x,\xi), \tag{4.62}$$

missä $a^*(x,\xi)$ on adjungaatin symboli ja $r(x,\xi) \in S^{2m}$ on kehitelmän jäännöstermi. Adjungaatin päätermi on $\overline{a}(x,\xi)$ ja tällöin operaattorin (4.61) päätermi on

$$\frac{a(x,\xi) + \overline{a}(x,\xi)}{2} - \operatorname{Re}\big(a(x,\xi)\big) = \frac{a(x,\xi) + \overline{a}(x,\xi)}{2} - \frac{a(x,\xi) + \overline{a}(x,\xi)}{2} = 0.$$

Eli päätermi on nolla ja päätermiä alemmat termit kuuluvat luokkaan S^{2m}.

$\square$

Tästä lemmasta saadaan seurauslause.

Korollaari 4.63. *Jos $a \in S^{2m+1}$ ja $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$, niin tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa operaattorille*

$$\frac{a(x,D) + a(x,D)^*}{2} - \big(\mathrm{Re}a\big)(x,D). \tag{4.64}$$

Todistus. Lemman 4.3.3 nojalla kyseisen operaattorin symboli kuuluu luokkaan S^{2m}. Tällöin (4.59) on voimassa lemman 4.3.2 nojalla.

$\square$

Näin ollen Tarkan Gårdingin epäyhtälön, lause 4.3.1, todistamiseksi riittää tarkastella symbolin reaaliosan määräämää pseudodifferentiaalioperaattoria $\big(\operatorname{Re} a\big)(x,D)$. Määritellään seuraavaksi hyödyllinen apuoperaattori.

Määritelmä 4.3.4. Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ parillinen funktio, jonka L^2-normi on yksi,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x,\xi)|^2 dx d\xi = 1. \tag{4.65}$$

Määritellään symboli $\psi(x,\xi)$ ehdolla

$$\psi(x,D) := \phi(x,D)^*\phi(x,D). \tag{4.66}$$

Tälle symbolille ψ on voimassa seuraava lause.

Lemma 4.3.5. Olkoon ψ määritelmän 4.3.4 mukainen symboli. Kootaan funktion ψ ominaisuudet yhteen:

$$\psi(x,\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}) \text{ on parillinen funktio.}$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\eta)\, dy d\eta = 1.$$

Todistus. Osoitetaan symbolia $\psi(x,\xi)$ koskevat väitteet. Merkitään adjungaatin symbolia $\phi^*(x,\xi)$. Adjungaatin symbolilla on asymptoottinen kehitelmä

$$\phi^*(x,\xi) \sim \sum_\mu \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\big(\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\phi}\big)(x,\xi), \tag{4.67}$$

ja symbolilla $\psi(x,\xi)$ on asymptoottinen kehitelmä

$$\psi(x,\xi) \sim \sum_\mu \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\big(\partial_\xi^\mu \phi^*\big)\big(\partial_x^\mu \phi\big)(x,\xi). \tag{4.68}$$

Kehitelmistä (4.67) ja (4.68) seuraa, että $\psi(x,\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Kehitelmässä (4.67) parillista funktiota $\overline{\phi}(x,\xi)$ osittaisderivoidaan kahdesti niin, että multi-indeksi on molemmissa osittaisderivoinneissa sama. Tällöin summan (4.67) jokainen termi on parillinen funktio eli symboli $\phi^*(x,\xi)$ on parillinen funktio.

Summassa (4.68) parillisia funktioita ϕ ja ϕ^* osittaisderivoidaan multi-indeksin μ mukaisesti. Tällöin osittaisderivaatat $\partial_\xi^\mu \phi^*$ ja $\partial_\xi^\mu \phi$ ovat joko parillisia tai parittomia funktioita. Tärkeää on kuitenkin että ne ovat saman tyyppisiä jokaisella multi-indeksillä μ, eli jos $\partial_\xi^\mu \phi^*$ on pariton niin myös $\partial_\xi^\mu \phi$ on pariton ja sama pätee parillisuuden tapauksessa. Kun nyt symbolit $\partial_\xi^\mu \phi^*$ ja $\partial_\xi^\mu \phi$ ovat parillisia tai parittomia yhtä aikaa multi-indeksillä μ, niin niiden tulo on aina parillinen. Näin ollen summan (4.68) jokainen termi on parillinen funktio ja siten $\psi(x,\xi)$ on parillinen funktio.

Todistetaan seuraavaksi, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(y,\eta)dyd\eta = 1. \tag{4.69}$$

Olkoon K_ϕ ja K_ψ indeksiä vastaavien pseudodifferentiaalioperaattoreiden ytimet. Koska ϕ on sileä kompaktikantajainen funktion, on ydin K_ϕ sileä ja siten ytimen integraalit ovat hyvin määriteltyjä. Voidaan laskea, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x,\xi)dxd\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\psi(x,x-y)e^{-iy\cdot\eta}dydxd\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\psi(x,x')e^{i(x-x')\cdot\xi}dx'dxd\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}e^{-ix'\cdot\xi}K_\psi(x,x')dx'dxd\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{K}_\psi(x,\xi)dxd\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\psi(x,x)dx.$$

Olkoon A ja B pseudodifferentiaalioperaattoreita joilla on ytimet K_A ja K_B ja olkoon $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Näiden kahden pseudodifferentiaalioperaattorin tulolle pätee, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{AB}(x,y)u(y)dy = A\big(Bu\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_A(x,z)\big(Bu\big)(z)dz$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_A(x,z)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_B(z,y)u(y)dy\right)dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_A(x,z)K_B(z,y)dz\right)u(y)dy.$$

Yllä olevat integraalit ovat hyvin määriteltyjä, koska $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Saatiin pääteltyä, että tulo-operaattorin ytimelle pätee

$$K_{AB}(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_A(x,z)K_B(z,y)dz, \tag{4.70}$$

missä integraali on määritelty distribuutiona. Näin ollen ns. diagonaalilla pätee, että

$$K_{AB}(x,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_A(x,z)K_B(z,x)dz.$$

Joten kun $AB = \psi(x,D)$, missä $A = \phi(x,D)^*$ ja $B = \phi(x,D)$, niin integraali pseudodifferentiaalioperaattorin ψ ytimestä diagonaalilla on

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\psi(x,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{K_\phi(z,x)}K_\phi(z,x)dzdx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|K_\phi(z,x)\big|^2dzdx.$$

Väite seuraa nyt Plancherelin lauseesta:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x,\xi)dxd\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_\phi(x,y)|^2 dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|(2\pi)^{(-n/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}\phi(x,\xi)d\xi\right|^2 dxdy$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\big(\mathscr{F}_2\phi\big)(x,y)\right|^2 dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\phi(x,\xi)\right|^2 dxd\xi = 1.$$

□

Seuraavaksi määritellään toinen apuna käytettävä symboli q ja siihen liittyvä funktio q_2.

Määritelmä 4.3.6. Olkoon $\eta \in \mathbb{R}^n$ ja määritellään

$$q(\eta) := (1 + |\eta|^2)^{1/4} \tag{4.71}$$

ja

$$q_2(\eta) := \sqrt{1 + |\eta|}. \tag{4.72}$$

Jatkossa etenkin symboli q on tärkeässä roolissa, kun määritellään symbolin $\mathrm{Re}a(x,\xi)$ hajotelma. Funktiot q ja q_2 ovat ekvivalentit ja monet tulevat epäyhtälöt on helpompi osoittaa käyttäen funktiota q_2. Olennaista on, että q on symboli toisin kuin q_2 ja siksi ei voida tyytyä pelkästää funktioon q_2.

Lemma 4.3.7. Funktiot q ja q_2 ovat ekvivalentit.

Todistus. Funktioiden välinen ekvivalenssi voidaan osoittaa tiedolla, että osamäärät q/q_2 ja q_2/q ovat koko avaruudessa määriteltyjä jatkuvia ja rajoitettuja funktioita, jotka ovat suurempia kuin yksi. On siis olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\frac{1}{C}q_2 \leq q(\eta) \leq Cq_2(\eta),$$

eli funktiot q ja q_2 ovat ekvivalentit. □

Esitellään nyt jo aiemmin mainittu hajotelma. Hajotelma koostuu kahdesta symbolista, joita merkitään alaindekseillä 0 ja 1. Hajotelma määritellään pseudodifferentiaalioperaattorille, jonka symboli kuuluu luokkaan S^{2m+1} ja on positiivinen. Määritellään ensin symboli a_1.

Määritelmä 4.3.8. Olkoon $a(x,\xi) \in S^{2m+1}$ ja $a(x,\xi) \geq 0$. Määritellään, että

$$a_1(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)})a(y,\eta)dyd\eta, \tag{4.73}$$

missä ψ ja q ovat määritelmien 4.3.4 ja 4.3.6 mukaiset funktiot.

Funktion $a_1(x,\xi)$ avulla voidaan määritellä toinen funktio $a_0(x,\xi)$. Näin alkuperäinen symboli saadaan näiden kahden funktion summana.

Määritelmä 4.3.9. Olkoon $a(x,\xi) \in S^{2m+1}$ ja $a(x,\xi) \geq 0$ ja olkoon a_1 määritelmän 4.3.8 mukainen funktio. Tällöin funktio a_0 määritellään siten, että

$$a_0(x,\xi) = a(x,\xi) - a_1(x,\xi). \tag{4.74}$$

Tässä vaiheessa ei ole selvää ovatko a_1 ja a_0 symboleita ja mihin symboliluokkaan ne kuuluisivat, siksi käytetään näiden kahden funktion yhteydessä sanaa funktio sanan symboli sijaan, kunnes symboliin liittyvä ehto täyttyy. Mikäli voidaan osoittaa, että a_0 on symboli, seuraa tästä määritelmän 4.3.9 nojalla, että myös a_1 on symboli. Myöhemmin lauseessa 4.3.23 osoitetaan, että a_0 todellakin on symboli, joka kuuluu luokkaan S^{2m}. Tarkka Gårdingin epäyhtälö voidaan todistaa välittämättä siitä onko a_1 symboli vai ei. Juuri määritelty funktio $a_1(x,\xi)$ määrää operaattorin $a_1(x,D)$, joka toteuttaa Tarkan Gårdingin epäyhtälön (4.59).

Lause 4.3.10. Määritelmän 4.3.8 funktio $a_1(x,\xi)$ määrää operaattorin $a_1(x,D)$, jolla epäyhtälö (4.59) on voimassa.

Todistus. Aloitetaan tutkimalla operaattoriin $\psi(x,D)$ liittyvän sisätulon ominaisuuksia. Ensinnäkin, symbolin ψ määräämään operaattoriin liittyy seuraava positiivisuustulos. Kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pätee, että

$$\big(\psi(x,D)u,u\big) = \big(\phi(x,D)^*\phi(x,D)u,u\big) = \|\phi(x,D)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq 0.$$

Sisätulo $\big(\psi(x,D)u,u\big)$ on siis positiivinen. Tämän avulla voidaan osoittaa myös, että symbolin $\psi(tx,\xi/t)$ määräämä pseudodifferentiaalioperaattori on positiivinen. Tämä voidaan osoittaa laskemalla,

$$\begin{aligned}\big(\psi(xt,\frac{D}{t})u,u\big) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi(xt,\frac{\xi}{t})\widehat{u}(\xi)d\xi\overline{u(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot t\xi'}\psi(xt,\xi')\widehat{u}(\xi't)|t^n|d\xi'\overline{u(x)}dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix'\cdot\xi'}\psi(x',\xi')\widehat{u}(\xi't)|t^n|d\xi'\overline{u\Big(\frac{x'}{t}\Big)}\Big|\frac{1}{t^n}\Big|dx'\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix'\cdot\xi'}\psi(x',\xi')\widehat{u}(\xi't)d\xi'\overline{u\Big(\frac{x'}{t}\Big)}dx'$$
$$= \Big|\frac{1}{t^n}\Big|\big(\psi(x,D)u_t,u_t\big) > 0, \quad \text{missä} \quad u_t = u(x/t).$$

Näin ollen kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pätee, että

$$\big(\psi(xt,\frac{D}{t})u,u\big) > 0. \tag{4.75}$$

Tuloksen (4.75) avulla voidaan todistaa translaatiolle vastaava positiivisuusominaisuus. Kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pätee, että

$$\Big(\psi\Big(t(\cdot-y),\frac{D-\eta}{t}\Big)u,u\Big) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi\Big(t(x-y),\frac{\xi-\eta}{t}\Big)\widehat{u}(\xi)d\xi\overline{u(x)}dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot(\xi'+\eta)}\psi\Big(t(x-y),\frac{\xi'}{t}\Big)\widehat{u}(t\xi'+\eta)d\xi'\overline{u(x)}dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x'+y)\cdot(\xi'+\eta)}\psi(tx',\frac{\xi'}{t})\widehat{u}(\xi'+\eta)d\xi'\overline{u(x'+y)}dx'$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x'\cdot\xi')}\psi(tx',\frac{\xi'}{t})e^{iy\cdot(\xi'+\eta)}\widehat{u}(\xi'+\eta)d\xi'\overline{e^{-ix'\cdot\eta}u(x'+y)}dx'. \tag{4.76}$$

Pysähdytään hetkeksi tähän ja tarkastellaan integraalin sisällä olevaa Fourier muunnosta. Voidaan päätellä, että

$$e^{iy\cdot(\xi'+\eta)}\widehat{u}(\xi'+\eta) = e^{iy\cdot(\xi'+\eta)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\xi'+\eta)}u(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot(\xi'+\eta)}u(x)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix'\cdot(\xi'+\eta)}u(x'+y)dx' = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix'\cdot\xi'}u(x'+y)e^{-ix'\cdot\eta}dx'$$
$$= \mathscr{F}\Big(u(x'+y)e^{-ix'\cdot\eta}\Big)(\xi').$$

Saatiin tulos, jonka mukaan

$$e^{iy\cdot(\xi'+\eta)}\widehat{u}(\xi'+\eta) = \mathscr{F}\Big(u(x'+y)e^{-ix'\cdot\eta}\Big)(\xi'). \tag{4.77}$$

Tällä tiedolla voidaan jatkaa integraalin (4.76) käsittelyä. Vaihdetaan samalla notaatiota $x' = x$ ja $\xi' = \xi$. Voidaan laskea, että

$$\Big(\psi\Big(t(x-y),\frac{D-\eta}{t}\Big)u,u\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi(tx, \frac{\xi}{t})\mathscr{F}\Big(u(x+y)e^{-ix\cdot\eta}\Big)(\xi)d\xi\, \overline{e^{-ix\cdot\eta}u(x+y)}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi(tx, \frac{\xi}{t})\widehat{u'}(\xi)d\xi\overline{u'(x)}dx \\
&= \big(\psi(tx, D/t)u', u'\big) > 0, \quad \text{missä} \quad u' = e^{-ix\cdot\eta}u(x+y).
\end{aligned}
$$

Näin ollen on osoitettu, että kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$
\big(\psi(t(\cdot - y), (D-\eta)/t)u, u\big) > 0. \tag{4.78}
$$

Funktioon ψ liittyvää sisätuloa on nyt käsitelty tarpeeksi ja voidaan siirtyä eteenpäin käsittelemään funktioon a_1 liittyvää sisätuloa. Funktion a_1 määrittelyssä (4.74) funktio ψ esiintyy samassa muodossa kuin tuloksessa (4.78). Tätä tulosta voidaan soveltaa, kun osoitetaan, että operaattoriin $a_1(x, D)$ liittyvä sisätulo $(a_1(x, D)u, u)$ on positiivinen. Soveltaen tulosta (4.78) voidaan päätellä, että kaikilla $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on voimassa

$$
\begin{aligned}
\big(a_1(x, D)u, u\big) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}a_1(x, \xi)\widehat{u}(\xi)d\xi\overline{u(x)}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)a(y,\eta)\, dyd\eta\, \widehat{u}(\xi)\, d\xi\overline{u(x)}\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(y,\eta)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\widehat{u}(\xi)d\xi\overline{u(x)}\, dxdyd\eta \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(y,\eta)\Big(\psi\Big(q(\eta)(x-y), \frac{D-\eta}{q(\eta)}\Big)u, u\Big)\, dyd\eta > 0.
\end{aligned}
$$

Positiivisuus seuraa symbolin a positiivisuudesta, $a(y, \eta) > 0$, ja tuloksesta (4.78). On siis osoitettu, että

$$
\big(a_1(x, D)u, u\big) > 0 \geq -C\|u\|^2_{H^m}, \quad \text{kaikilla } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tag{4.79}
$$

missä $C > 0$.

$\square$

Jos voidaan osoittaa, että $a_0 \in S^{2m}$, niin tällöin lemman 4.3.2 ja juuri todistetun lauseen 4.3.10 nojalla tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) olisi voimassa pseudodifferentiaalioperaattorille $a(x, D)$, missä $a(x, \xi) \in S^{2m+1}$ ja $a(x, \xi) \geq 0$. Väite ei suinkaan ole triviaali, sillä funktion a_0 määrää symboli $a \in S^{2m+1}$ ja tästä symbolista integroimalla muodostettu funktio a_1. Ennen kuin voidaan osoittaa, että $a_0 \in S^{2m}$, on käytävä läpi tätä väitettä tukevia asioita. Aloitetaan muutamilla määritelmillä. Määritellään ensin funktio F_j.

Määritelmä 4.3.11. Määritellään funktio $F_j(\eta)$ siten, että

$$F_j(\eta) := \frac{1}{q(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta_j} q(\eta), \quad \text{kaikilla } \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{4.80}$$

missä q on määritelmän 4.3.6 mukainen funktio.

Esityksen luettavuuden parantamiseksi esitellään funktion ψ derivointiin liittyvä notaatio.

Määritelmä 4.3.12. Sovitaan notaatiosta

$$\psi^{(k)}(x,\xi) := \frac{d^k}{dt^k} \psi(tx, \xi/t)\Big|_{t=1}, \tag{4.81}$$

missä $k \in \mathbb{N}$. Mikäli $k = 1$, niin voidaan käyttää myös merkintää

$$\psi'(x,\xi) := \frac{d}{dt} \psi(tx, \xi/t)\Big|_{t=1}. \tag{4.82}$$

Voidaan laskea mikä ψ' on käyttäen derivaatan tulosääntöä.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(tx,\xi/t)\Big|_{t=1} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot x_n - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \cdot \xi_1 - \cdots - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \cdot \xi_n \\ &= \langle \nabla_x \psi(x,\xi), x\rangle - \langle \nabla_\xi \psi(x,\xi), \xi\rangle. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Katsotaan vielä, kuinka kohdassa (4.82) määritelty derivaattafunktio kehittyy korkeammilla kertaluokilla. Voidaan laskea esimerkiksi funktiot ψ'' ja ψ'''. Funktioksi ψ'' saadaan

$$\begin{aligned} \psi''(x,\xi) &= \frac{d}{dt}\psi'(tx,\xi/t)\Big|_{t=1} = \frac{d}{dt}\big(\langle \nabla_x \psi(tx,\xi/t), tx\rangle - \langle \nabla_\xi \psi(tx,\xi/t), \xi/t\rangle\big)\Big|_{t=1} \\ &= x_1 \frac{\partial \psi'(x,\xi)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial \psi'(x,\xi)}{\partial x_n} + x_n \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial x_n} \\ &\quad + \xi_1 \frac{\partial \psi'(x,\xi)}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial \psi'(x,\xi)}{\partial \xi_n} - \xi_n \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_n} \\ &= \langle \nabla_x \psi'(x,\xi), x\rangle + \langle \nabla_x \psi(x,\xi), x\rangle + \langle \nabla_\xi \psi'(x,\xi), \xi\rangle - \langle \nabla_\xi \psi(x,\xi), \xi\rangle. \end{aligned}$$

Yhtä lailla derivoimalla voidaan laskea mikä on ψ'''.

$$\psi'''(x,\xi) = \frac{d}{dt}\psi''(tx,\xi/t)\Big|_{t=1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi'(x,\xi)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + 2\langle \nabla_x \psi'(x,\xi), x\rangle + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi(x,\xi)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j \\
&\quad + 2\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi'(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_j} x_i \xi_j + 2\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_j} x_i \xi_j + \langle \nabla_x \psi(x,\xi), x\rangle \\
&\quad - \langle \nabla_\xi \psi(x,\xi), \xi\rangle + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi'(x,\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \xi_i \xi_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi(x,\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \xi_i \xi_j.
\end{aligned}
$$

Jatkon kannalta funktioilla $\psi^{(k)}$, missä $k \in \mathbb{N}$, on tärkeä merkitys, joten sanotaan vielä muutama sana niistä, ennen kuin palataan funktion a_0 pariin. Ensinnäkin ne ovat parillisia Schwartzin funktioita. Se että kyse on Schwartzin funktioista selittyy sillä, että osittaisderivointi ja polynomeilla kertominen säilyttää funktion Schwartzin funktiona. Parillisuus voidaan osoittaa käyttäen hyödyksi funktion ψ parillisuutta.

Lemma 4.3.13. Funktio $\psi^{(k)}$ on parillinen kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Todistus. Osoitetaan ensin että ψ' on parillinen. Voidaan suoraan laskea, että

$$
\begin{aligned}
\psi'(-x,-\xi) &= \frac{d}{dt}\psi(-tx,-\xi/t)\bigg|_{t=1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(-tx,-\xi/t)}{\partial x_j} \frac{d(-tx_j)}{dt}\bigg|_{t=1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(-tx,-\xi/t)}{\partial \xi_j} \frac{d(-\xi_j/t)}{dt}\bigg|_{t=1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(-x,-\xi)}{\partial x_j}(-x_j) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(-x,-\xi)}{\partial \xi_j}\xi_j.
\end{aligned}
$$

Osittaisderivointi muuttaa parillisen funktion parittomaksi ja koska ψ on parillinen funktio, niin $\frac{\partial \psi(-x,-\xi)}{\partial x_j}$ ja $\frac{\partial \psi(-x,-\xi)}{\partial \xi_j}$ ovat parittomia funktioita kaikilla $j \in \{1, \cdots, n\}$. Tällä tiedolla saadaan, että

$$
\begin{aligned}
\psi'(-x,-\xi) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial x_j}(x_j) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_j}(-\xi_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial x_j} \frac{d(x_j t)}{dt}\bigg|_{t=1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(x,\xi)}{\partial \xi_j} \frac{d(\xi_j/t)}{dt}\bigg|_{t=1} \\
&= \frac{d}{dt}\psi(tx,\xi/t)\bigg|_{t=1} = \psi'(x,\xi).
\end{aligned}
$$

Nyt on osoitettu, että ψ' on parillinen funktio. Myös funktiot ψ'' ja ψ''' ovat parillisia. Tämän voi todeta helposti laskemalla.

Osoitetaan induktiolla, että myös korkeamman kertaluvun funktiot ovat parillisia. Alkuaskel pätee, koska funktio ψ' on parillinen. Tehdään induktio-oletus ja oletetaan, että $\psi^{(k)}$ on parillinen jollakin $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$. Otetaan induktio-askel ja osoitetaan, että $\psi^{(k+1)}$ on parillinen.

$$\begin{aligned}
\psi^{(k+1)}(-x,-\xi) &= \frac{d}{dt}\psi^{(k)}(-xt,-\xi/t)\Big|_{t=1} \\
&= \langle \nabla_x \psi^{(k)}(-x,-\xi), -x\rangle - \langle \nabla_\xi \psi^{(k)}(-x,-\xi), -\xi\rangle \\
&= \langle \nabla_x \psi^{(k)}(x,\xi), x\rangle - \langle \nabla_\xi \psi^{(k)}(x,\xi), \xi\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\psi^{(k)}(xt,\xi/t)\Big|_{t=1} = \psi^{(k+1)}(x,\xi).
\end{aligned}$$

Näin ollen on osoitettu, että $\psi^{(k)}(x,\xi)$ on parillinen kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

Funktiolla $\psi^{(k)}$ on lisäksi seuraava merkittävä ominaisuus.

Lemma 4.3.14. Kaikilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pätee, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{(k)}(x,\xi)dxd\xi = 0. \tag{4.84}$$

Todistus. Tämä voidaan osoittaa suoraan laskemalla. Merkitään ensin, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{(k)}(x,\xi)\,dxd\xi = \lim_{R\to\infty}\int_{B(0,R)} \psi^{(k)}(x,\xi)\,d\Omega,$$

missä $B(0,R) \subset \mathbb{R}^{2n}$ ja $d\Omega$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2n}$ Lebesguen mitta. Osittainintegroimalla saadaan, että

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(0,R)} \psi^{(k)}(x,\xi)\,d\Omega, &= \int\limits_{B(0,R)} \nabla_x\psi^{(k-1)}(x,\xi)\cdot x\,d\Omega - \int\limits_{B(0,R)} \nabla_\xi\psi^{(k-1)}(x,\xi)\cdot \xi\,d\Omega \\
&= \int\limits_{\partial B(0,R)} \psi^{(k-1)}(x,\xi)x\hat{\nu}\,d\Gamma + \int\limits_{B(0,R)} \psi^{(k-1)}(x,\xi)\cdot\nabla_x x\,d\Omega \\
&\quad + \int\limits_{\partial B(0,R)} \psi^{(k-1)}(x,\xi)\xi\hat{\nu}\,d\Gamma - \int\limits_{B(0,R)} \psi^{(k-1)}(x,\xi)\cdot\nabla_\xi \xi\,d\Omega,
\end{aligned}$$

missä $d\Gamma$ on R-säteisen kuulan euklidinen pintamitta.. Kun R kasvaa rajatta, reunatermit suppenevat nollaan, koska kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $\psi^{(k)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Tällöin jäljelle jää

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{(k)}(x,\xi)\,dxd\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{(k-1)}(x,\xi)\cdot\nabla_x x\,dxd\xi - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{(k-1)}(x,\xi)\cdot\nabla_\xi \xi\,dxd\xi = 0.$$

□

Funktion ψ osittaisderivointiin liittyen pätee seuraava tulos.

Lemma 4.3.15. Olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksejä joille pätee $|\alpha| = |\beta| = 1$. Tällöin

$$(\partial_\xi^\alpha + \partial_\eta^\beta)\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) =: \psi'\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)F_j(\eta), \tag{4.85}$$

missä j viittaa siihen koordinaattiin jolla $\beta_j \neq 0$.

Todistus. Voidaan laskea, että

$$\begin{aligned}
&(\partial_\xi^\alpha + \partial_\eta^\beta)\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\\
&\qquad = \partial_2\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\frac{1}{q(\eta)} + \partial_1\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(x-y)\partial_\eta^\beta q(\eta)\\
&\qquad\qquad + \partial_2\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\Big(-\frac{1}{q(\eta)} - \frac{\xi-\eta}{q(\eta)^2}\partial_\eta^\beta q(\eta)\Big)\\
&\qquad = \partial_1\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(x-y)\partial_\eta^\beta q(\eta)\\
&\qquad\qquad - \partial_2\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\Big(\frac{\xi-\eta}{q(\eta)^2}\partial_\eta^\beta q(\eta)\Big)\\
&\qquad = \Bigg[\partial_1\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(x-y)q(\eta)\\
&\qquad\qquad - \partial_2\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\Big(\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\Bigg]\frac{1}{q(\eta)}\partial_\eta^\beta q(\eta).
\end{aligned}$$

Näin ollen voimme kirjoittaa, että

$$(\partial_\xi^\alpha + \partial_\eta^\beta)\psi\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) =: \psi'\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)F_j(\eta), \tag{4.86}$$

missä j viittaa siihen koordinaattiin jolla $\beta_j \neq 0$.

□

Kun pyritään osoittamaan että $a_0 \in S^{2m}$, niin tällöin määritelmän 2.1.1 mukaisesti on tutkittava funktion a_0 osittaisderivaattoja.

Lemma 4.3.16. Funktiolle a_0 pätee

$$\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_0(x,\xi) = \sum_{k=0}^{N} c_k(x,\xi), \tag{4.87}$$

missä

$$c_k(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k\big((x-y)q(\eta),(\xi-\eta)/q(\eta)\big)b_k(y,\eta)\,dyd\eta - b_k(x,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\,dyd\eta, \tag{4.88}$$

missä $\psi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ on parillinen funktio ja $b_k \in S^{2m+1-|\alpha|}$.

Todistus. Tämä väite voidaan todistaa induktiolla. Aloitetaan toteamalla, että väite pätee multi-indekseillä joilla $|\alpha| = |\beta| = 0$, sillä määritelmän (4.3.9) nojalla,

$$a_0(x,\xi) = a(x,\xi) - a_1(x,\xi),$$

josta kaavojen (4.74) ja (4.69) avulla saadaan

$$a_0(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\Big((x-y)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\big(-a(y,\eta)\big)\,dyd\eta - \big(-a(x,\xi)\big)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\eta)\,dyd\eta. \tag{4.89}$$

Koska $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ on parillinen funktio ja $a \in S^{2m+1}$, väite pätee, kun $|\alpha| = |\beta| = 0$.

Otetaan alkuaskel ja katsotaan toteutuuko väite, kun $|\alpha| = 1$. Voidaan laskea, että

$$\begin{aligned}\partial_\xi^\alpha a_0(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\eta)\,dyd\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\Big((x-y)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\partial_\eta^\alpha a(y,\eta)\,dyd\eta \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'\Big((x-y)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)F_j(\eta)a(y,\eta)\,dyd\eta + F_j(\xi)a(x,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(y,\eta)dyd\eta.\end{aligned}$$

Funktiot $\psi, \psi' \in \mathscr{S}$ ovat parillisia ja lisäksi $\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) \in S^{2m+1-|\alpha|}$ ja $F_j(\xi)a(x,\xi) \in S^{2m+1-|\alpha|}$. Näin ollen $\partial_\xi^\alpha a_0(x,\xi)$ voidaan kirjoittaa summana kahdesta termistä jotka ovat muotoa (4.111), joten induktion alkuaskel pätee.

Tehdään sitten induktio-oletus: Olkoon N ja M positiivisia kokonaislukuja. Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi siten, että $|\alpha| = N$. Oletetaan, että kaikilla $k \in \{0, 1, \cdots, M\}$ on olemassa parillinen funktio $\psi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ja symboli $b_k(x,\xi) \in S^{m+1-|\alpha|}$ siten, että

$$\partial_\xi^\alpha a_0(x,\xi) = \sum_{k=0}^{M} c_k(x,\xi) = \sum_{k=0}^{M} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k\Big((x-y)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)b_k(y,\eta)\,dyd\eta$$

$$- b_k(x,\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\, dyd\eta.$$

Otetaan seuraavaksi induktioaskel ja tarkastellaan funktiota $a_0^{(\alpha')}(x,\xi)$, missä $\alpha' = \alpha + \gamma$ on multi-indeksi, jolla $|\gamma| = 1$. Voidaan laskea, että

$$\begin{aligned} a_0^{(\alpha')}(x,\xi) &= \partial_\xi^\gamma a_0^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\gamma \sum_{k=0}^{M} c_k(x,\xi) \\ &= \sum_{k=0}^{M} \Bigg[\partial_\xi^\gamma \big(- b_k(x,\xi)\big) \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\, dyd\eta \\ &\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) \partial_\eta^\gamma b_k(y,\eta)\, dyd\eta. \\ &\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k'\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) F_j(\eta) b_k(y,\eta)\, dyd\eta \\ &\qquad + F_j(\xi) b_k(x,\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k'(y,\eta) dyd\eta \Bigg]. \end{aligned}$$

Funktiot $\psi, \psi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ovat parillisia. Lisäksi $\partial_\xi^\gamma b_k(x,\xi) \in S^{2m+1-|\alpha+\gamma|} = S^{2m+1-|\alpha'|}$ ja $F_j(\xi)b_k(x,\xi) \in S^{2m+1-|\alpha|-1} = S^{2m+1-|\alpha'|}$. Funktion F_j indeksi j viittaa siihen koordinanttiin missä $\gamma_j \neq 0$. Induktioaskel tuottaa siten toivotun tuloksen.

Tarkastellaan vielä miten käy, kun osittaisderivoidaan x muuttujan suhteen. Olkoon M positiivinen kokonaisluku. Olkoon $\beta \in \mathbb{N}^n$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mielivaltaiset multi-indeksit. Tällöin kaikilla $k \in \{0, \cdots, M\}$ on olemassa symboli b_k siten, että

$$\begin{aligned} a_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi) &= \partial_x^\beta a_0^{(\alpha)}(x,\xi) \\ &= \partial_x^\alpha \sum_{k=0}^{M} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) b_k(y,\eta)\, dyd\eta - b_k(x,\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\, dyd\eta \Bigg] \\ &= \sum_{k=0}^{M} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) \partial_\eta^\alpha b_k(y,\eta)\, dyd\eta - \partial_x^\alpha b_k(x,\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\, dyd\eta \Bigg], \end{aligned}$$

kaikilla $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Funktio $\psi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ on parillinen ja $\partial_x^\alpha b_k(x,\xi) \in S^{2m+1-|\alpha|}$ kaikilla $k \in \{0, \cdots, M\}$. Näin ollen induktiotodistus on valmis ja voimme sanoa, että $a_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)$ voidaan esittää äärellisenä summana termeistä c_k, joiden muoto on kaavan (4.111) mukainen.

$\square$

Edellisessä lauseessa määriteltyjen funktioiden c_k ja b_k välillä on yhteys, joka tulee osoittautumaan tärkeäksi, kun osoitetaan että $a_0 \in S^{2m}$. Nimittäin, oletuksesta $b_k \in S^{\mu}$ seuraa, että $|c_k(x,\xi)| \leq (1+|\xi|)^{\mu-1}$. Olennaisesti tämän todistamisesta tulee termin c_k määrittävien integraalien estimointitehtävä kaavassa (4.111). Todistus jaetaan kolmeen lemmaan, joiden seurauksena tulos saadaan.

Lemma 4.3.17. Olkoon ψ_k ja b_k määritelty kuten lemmassa 4.3.16, sillä erotuksella että nyt symbolin b_k luokan aste on $\mu \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\iint\limits_{|\xi-\eta|\geq\frac{1+|\xi|}{2}} \left|\psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)b_k(y,\eta)\right| dyd\eta \leq C(1+|\xi|)^{|\mu|-1}. \tag{4.90}$$

Todistus. Olkoon $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ kiinnitetty ja olkoon $\eta \in \mathbb{R}^n$ siten, että $|\xi-\eta| \geq (1+|\xi|)/2$. Osoitetaan, että tällöin

$$1+|\eta| \leq 3|\xi-\eta|, \quad \frac{1+|\xi|}{1+|\eta|} \leq 1+|\xi-\eta| \quad \text{ja} \quad \frac{1+|\eta|}{1+|\xi|} \leq 1+|\xi-\eta|.$$

Ensimmäiseksi voidaan huomata, että

$$|\xi-\eta| \geq |\eta|-|\xi| > 0 \quad \text{ja} \quad |\xi-\eta| \geq \frac{1+|\xi|}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2|\xi-\eta|-1 \geq |\xi|.$$

Tästä voidaan päätellä, että

$$|\eta| \leq |\xi| + |\xi-\eta| \leq 2|\xi-\eta| - 1 + |\xi-\eta|,$$

josta seuraa väite,

$$3|\xi-\eta| \geq 1+|\eta|. \tag{4.91}$$

Toiseksi huomataan, että

$$\frac{1+|\xi|}{1+|\eta|} - 1 = \frac{1+|\xi|-1-|\eta|}{1+|\eta|} = \frac{|\xi|-|\eta|}{1+|\eta|} \leq \frac{|\xi-\eta|}{1+|\eta|} \leq |\xi-\eta|,$$

josta seuraa väite,

$$\frac{1+|\xi|}{1+|\eta|} \leq 1+|\xi-\eta|. \tag{4.92}$$

Viimeinen väite todistetaan vastaavalla tavalla. Voidaan nimittäin laskea, että

$$\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}-1=\frac{1+|\eta|-1-|\xi|}{1+|\xi|}=\frac{|\eta|-|\xi|}{1+|\xi|}\leq\frac{|\xi-\eta|}{1+|\xi|}\leq|\xi-\eta|,$$

josta saadaan viimeinen väite,

$$\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}\leq 1+|\xi-\eta|. \tag{4.93}$$

Alueessa $\{\eta\in\mathbb{R}^n : 2|\xi-\eta|\geq 1+|\xi|\}$ funktiota ψ_k voidaan arvioida ylöspäin lausekkeella

$$\Big|\psi_k\Big((x-y)q(\eta),\frac{|\xi-\eta|}{q(\eta)}\Big)\Big|\leq C_N\Big(1+|x-y|q(\eta)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\eta)}\Big)^{-2n-1}\Big(1+\frac{|\xi-\eta|^2}{q(\eta)^2}\Big)^{-N} \tag{4.94}$$

kaikilla $N\in\mathbb{N}$. Tämä perustuu siihen, että $\psi_k\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Koska $q(\eta)^2\leq 1+|\eta|\leq 3|\xi-\eta|$, majorantin toinen termi saadaan korvattua termillä $(1+|\xi-\eta|/3)^{-N}$. Määritellään lisäksi, että $t:=q(\eta)/q(\xi)$. Kun $N>|\mu|+n+1$, voidaan määritellylle funktiolle johtaa estimaatti alueessa $\{\eta\in\mathbb{R}^n : 2|\xi-\eta|\geq 1+|\xi|\}$ siten, että

$$\begin{aligned}
&\Big|\psi_k\Big((x-y)q(\eta),\frac{|\xi-\eta|}{q(\eta)}\Big)b_k(y,\eta)\Big|\\
&\leq C_N\Big(1+|x-y|q(\eta)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\eta)}\Big)^{-2n-1}\Big(1+\frac{|\xi-\eta|^2}{q(\eta)^2}\Big)^{-N}(1+|\eta|)^{\mu}\\
&\leq C_N\Big(1+|x-y|\frac{q(\xi)}{\sqrt{1+|\xi-\eta|}}+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)\sqrt{1+|\xi-\eta|}}\Big)^{-2n-1}\Big(1+\frac{|\xi-\eta|}{3}\Big)^{-N}(1+|\eta|)^{|\mu|}\\
&\leq C_N\Big(1+|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)}\Big)^{-2n-1}\big(\sqrt{1+|\xi-\eta|}\big)^{2n+1}\Big(1+\frac{|\xi-\eta|}{3}\Big)^{-N}(1+|\eta|)^{|\mu|}\\
&\leq C_N'\Big(1+|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)}\Big)^{-2n-1}\Big(1+|\xi-\eta|\Big)^{n+1/2}\Big(1+|\xi-\eta|\Big)^{-N}(1+|\eta|)^{|\mu|}\\
&\leq C_N'\Big(1+|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)}\Big)^{-2n-1}(1+|\xi|)^{-N+n+1/2}\Big(\frac{1+|\xi|}{1+|\xi-\eta|}\Big)^{|\mu|}
\end{aligned}$$

(4.95)

$$\leq C_N'(1+|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)})^{-2n-1}(1+|\xi|)^{|\mu|+n+1-N}.$$

Tämän estimaatti voidaan nyt sijoittaa kaavassa (4.111) määritellyn termin c_k kaavaan ja arvioida sen avulla termin c_k suuruutta alueessa $\{\eta\in\mathbb{R}^n : 2|\xi-\eta|\geq 1+|\xi|\}$. Sijoitetaan saatu estimaatti kaavassa (4.111) olevaan integraaliin ja huomataan, että

$$\iint\limits_{|\xi-\eta|\geq\frac{1+|\xi|}{2}}\Big|\psi_k\Big((x-y)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)b_k(y,\eta)\Big|\,dyd\eta$$

$$\leq C'_N(1+|\xi|)^{|\mu|+n+1-N} \iint\limits_{|\xi-\eta|\geq\frac{1+|\xi|}{2}} (1+|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)})^{-2n-1}\,dyd\eta$$

$$\leq C''_N(1+|\xi|)^{|\mu|+n+1-N} \leq C''_N(1+|\xi|)^{|\mu|-1}. \tag{4.96}$$

□

Siirrytään sitten tarkastelemaan integrointia alueessa $\{\eta \in \mathbb{R}^n : 2|\xi-\eta| < 1+|\xi|\}$.

Lemma 4.3.18. Oletetaan, että $|\xi-\eta| < (1+|\xi|)/2$. Olkoon $\theta = \xi + t(\eta-\xi)$ ja $t \in [0,1]$. Tällöin kaikilla θ pätee, että

$$(1+|\xi|) < 2(1+|\theta|) < 3(1+|\xi|). \tag{4.97}$$

Todistus. Osoitetaan ensin jälkimmäinen epäyhtälö. Voidaan laskea, että

$$|\theta| = |\xi+t(\eta-\xi)| \leq |\xi| + |\xi-\eta| < |\xi| + \frac{1+|\xi|}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}|\xi|,$$

josta saadaan

$$1+|\theta| = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}|\xi| < 3(1+|\xi|).$$

Ensimmäinen epäyhtälö voidaan osoittaa huomaamalla, että

$$\begin{aligned}|\theta| &= |\xi+t(\eta-\xi)| \geq |\xi| - t|\xi-\eta| \geq |\xi| - |\xi-\eta| \\ &> |\xi| - \frac{1+|\xi|}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{|\xi|}{2},\end{aligned}$$

josta saadaan

$$2(1+|\theta|) > 1+|\xi|.$$

□

Määritellään funktio seuraavaksi esiteltävään lemmaan liittyen.

Määritelmä 4.3.19. Olkoon $b_k \in S^\mu$, missä $\mu \in \mathbb{R}$. Määritellään uusi funktio $B_k(x,y,\xi,\eta)$ asettamalla

$$B_k(x,y,\xi,\eta) := b_k(y,\eta) - \sum_{|\alpha+\beta|\leq 2} \frac{1}{\alpha!\beta!} b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha. \tag{4.98}$$

Toinen termien c_k estimoimiseen liittyvä lemma on seuraava:

Lemma 4.3.20. Olkoon ψ_k määritelty kuten lemmassa 4.3.16 ja funktio B_k kuten edellä. On olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\iint\limits_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \Big|\psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) B_k(x,y,\xi,\eta)\Big|\, dyd\eta \le C(1+|\xi|)^{|\mu|-3/2}. \tag{4.99}$$

Todistus. Aloitetaan tämän integraalilausekkeen estimointi funktioista B_k. Taylorin kaavaa voidaam soveltaa, sillä $B_k(x,y,\xi\eta)$ on olennaisesti vain funktion $b_k(x,\xi)$ Taylorin sarjan jäännöstermi. Arvoidaan siis funktiota B_k laskemalla, että

$$\begin{aligned}
|B_k(x,y,\xi\eta)| &= \Big|\sum_{|\alpha+\beta|=3} \frac{|\alpha+\beta|}{(\alpha+\beta)!}\int_0^1 (1-t)^{|\alpha+\beta|-1}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta b_k\big(x+t(y-x), \xi+t(\eta-\xi)\big)\,dt \\
&\qquad\qquad \cdot (y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\Big| \\
&= \sum_{|\alpha|=3}\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 dt(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{\mu-3}|\xi-\eta|^3 \\
&\qquad + \sum_{\substack{|\alpha|=2\\|\beta|=1}}\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2\,dt\,(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{\mu-2}|x-y||\xi-\eta)|^2 \\
&\qquad + \sum_{\substack{|\alpha|=1\\|\beta|=2}}\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2\,dt\,(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{\mu-1}|x-y|^2|\xi-\eta)| \\
&\qquad + \sum_{|\beta|=3}\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2\,dt\,(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{\mu}|x-y|^3 \\
&\le C(1+|\xi|)^{\mu-3}|\xi-\eta|^3 + C(1+|\xi|)^{\mu-2}|x-y||\xi-\eta|^2 \\
&\qquad + C(1+|\xi|)^{\mu-1}|x-y|^2|\xi-\eta| + C(1+|\xi|)^{\mu}|x-y|^3 \\
&\le C(1+|\xi|)^{\mu-3/2}\Big((1+|\xi|)^{-3/2}|\xi-\eta|^3 + (1+|\xi|)^{-1/2}|x-y||\xi-\eta|^2 \\
&\qquad + (1+|\xi|)^{1/2}|x-y|^2|\xi-\eta| + (1+|\xi|)^{3/2}|x-y|^3\Big) \\
&= C(1+|\xi|)^{\mu-3/2}\big((1+|\xi|)^{1/2}|x-y| + (1+|\xi|)^{-1/2}|\xi-\eta|\big)^3 \\
&= C(1+|\xi|)^{\mu-3/2}\big(|x-y|q_2(\xi) + \frac{|\xi-\eta|}{q_2(\xi)}\big)^3.
\end{aligned}$$

Koska q_2 ja q ovat ekvivalentit, on osoitettu, että

$$|B_k(x,y,\xi,\eta)| \le C(1+|\xi|)^{\mu-3/2}\big(|x-y|q(\xi) + \frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)}\big)^3.$$

Näin ollen integraalia voidaan estimoida seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \Big|\psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big) B_k(x,y,\xi,\eta)\Big|\, dyd\eta \\
&\quad \le C(1+|\xi|)^{\mu-3/2} \iint\limits_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \Big|\psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)\big(|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)}\big)^3\Big|\, dyd\eta \\
&\quad \le C'(1+|\xi|)^{|\mu|-3/2}. \qquad (4.100)
\end{aligned}
$$

□

Kolmas termien c_k estimoimiseen liittyvä lemma on seuraava:

Lemma 4.3.21. Olkoon ψ_k ja b_k määritelty kuten lemmassa 4.3.16, sillä erotuksella että nyt symbolin b_k luokan aste on $\mu \in \mathbb{R}$. On olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\le 2\\ |\alpha+\beta|\neq 0}} \frac{1}{\alpha!\beta!} b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi) \iint\limits_{|\xi-\eta|<\frac{1+|\xi|}{2}} \psi_k\big((\xi-\eta)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta\Big| \\
&\qquad \le C\langle\xi\rangle^{\mu-1}. \qquad (4.101)
\end{aligned}
$$

Todistus. Tarkastellaan integraalia

$$
\iint\limits_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta. \qquad (4.102)
$$

Tämän integraalin estimointia varten funktion ψ_k argumenttia on muokattava. Olkoon z ja θ kiinnitetty ja määritellään $\varphi(t) := \psi_k(zt, \theta/t)$. Koska $\varphi(t)$ on differentoituva saadaan

$$
\varphi(t) = \varphi(1) + \frac{d\varphi}{dt}(1)(t-1) + |t-1|O(|t-1|).
$$

Näin ollen funktiolle ψ_k pätee,

$$
\psi_k(zt, \theta/t) = \psi_k(z,\theta) + \psi_k'(z,\theta)(t-1) + |t-1|O(|t-1|).
$$

Tällöin on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$
|\psi_k(zt,\theta/t) - \psi_k(z,\theta) - \psi_k'(z,\theta)(t-1)| \le C_{z,\theta}|t-1|^{-2},
$$

missä vakio $C_{z,\theta}$ on riippumaton ainoastaan muuttujasta t. Tätä tulosta voidaan vielä hieman parantaa. Koska $\psi_k, \psi_k' \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, niin tällöin kun luvuilla t ja $1/t$ on kiinnitetty yläraja, niin millä tahansa luvun $N \in \mathbb{N}$ arvolla saadaan, että

$$|\psi_k(zt, \theta/t) - \psi_k(z,\theta) - \psi_k'(z,\theta)(t-1)| \leq C_N(1+|z|+|\theta|)^{-N}|t-1|^{-2}, \tag{4.103}$$

missä vakio C_N riippuu ainoastaan potenssista $-N$. Pidetään nämä tulokset muistissa ja jätetään funktio ψ_k hetkeksi rauhaan. Muuttujanvaihto aloitetaan funktiosta q. Funktion q sisältämä muuttuja voidaan vaihtaa Taylorin sarjan avulla. Kehitelmää käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} q(\eta) &= \sum_{|\alpha|\leq 1} \frac{D^\alpha q(\xi)}{\alpha!}(\eta-\xi)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} h_\alpha(\eta)(\xi-\eta)^\alpha \\ &= q(\xi) + \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha q(\xi)}{\alpha!}(\eta-\xi)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} h_\alpha(\eta)(\xi-\eta)^\alpha. \end{aligned}$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{aligned} q(\eta) - q(\xi) &= \langle \nabla q(\xi), \eta - \xi\rangle + \sum_{|\alpha|=2} \int_0^1 (1-t) D^\alpha q(\xi + t(\eta-\xi))dt\,(\eta-\xi)^\alpha \\ &= \langle \nabla q(\xi), \eta - \xi\rangle + \mathcal{O}((\eta-\xi)/q(\xi))^2/q(\xi). \end{aligned}$$

Kun nyt valitaan luvulle t arvo $t = q(\eta)/q(\xi)$, niin siitä seuraa, että

$$t = \frac{q(\eta)}{q(\xi)} \iff tq(\xi) = q(\eta) \iff q(\xi)(t-1) = q(\eta) - q(\xi).$$

Tällöin integraalin (4.102) integraalialueen määritelmän nojalla, t kuuluu välille, joka on rajoitettu sekä ylhäältä että alhaalta. Nyt voidaan palata takaisin funktion ψ_k pariin. Sijoitetaan kaavassa (4.103) muuttujaan (z,θ) muuttuja $((x-y)q(\xi), (\xi-\eta)/q(\xi))$ ja estimoidaan

$$\begin{aligned} &\big|\psi_k((x-y)q(\eta), (\xi-\eta)/q(\eta)) - \psi_k((x-y)q(\xi), (\xi-\eta)/q(\xi)) \\ &\qquad - \Big\langle q'(\xi), \frac{\eta-\xi}{q(\xi)}\Big\rangle \psi_k'((x-y)q(\xi), (\xi-\eta)/q(\xi))\big| \\ &\leq C_N(1+|(x-y)q(\xi)| + |(\xi-\eta)/q(\xi)|)^{-N}|t-1|^{-2} \\ &\leq C_N(1+|(x-y)q(\xi)| + |(\xi-\eta)/q(\xi)|)^{-N}(q(\eta)-q(\xi))^2(1+|\xi|)^{-1} \\ &\leq C_N'(1+|(x-y)q(\xi)| + |(\xi-\eta)/q(\xi)|)^{2-N}(1+|\xi|)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Kaavan (4.104) estimaatti on oikein hyvä ja sen avulla voidaan muuttaa muuttuja η muuttujaksi ξ symbolissa q. Nyt voidaan laskea integraali (4.102). Voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \cdots - \iint\limits_{2|\xi-\eta|\geq 1+|\xi|} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Eli alkuperäinen integraali on integraali koko avaruuden yli, josta vähennetään integraali alueen $\{\eta \in \mathbb{R}^n : 2|\xi+\eta| > 1+|\xi|\}$ yli. Jälkimmäinen integraali yli alueen $\{\eta \in \mathbb{R}^n : 2|\xi+\eta| > 1+|\xi|\}$ muistuttaa hyvin paljon sitä integraalia, jonka estimoimme kohdissa (4.94) – (4.96). Koska seuraava päättely on hyvin samankaltainen, niin viittaamme lähinnä siihen mitä oli tehty kohdissa (4.94) – (4.96). Samankaltaisella päättelyllä saadaan

$$\begin{aligned}
&\Big|\iint\limits_{2|\xi-\eta|\geq 1+|\xi|} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta\Big| \\
&\leq C(1+|\xi|)^{|\alpha|+|n|+1-N} \iint\limits_{2|\xi-\eta|\geq 1+|\xi|} \big(1+|x-y|q(\xi)+\frac{|\xi-\eta|}{q(\xi)}\big)^{-2n-3}|y-x|^{|\beta|}\, dyd\eta \\
&\leq C'(1+|\xi|)^{|\alpha|+|n|+1-N}.
\end{aligned}$$

Luku N voidaan valita mielivaltaisen suureksi positiiviseksi luvuksi, joten voidaan päätellä, että kaavassa (4.105) integraali alueen $\{\eta \in \mathbb{R}^n : 2|\xi+\eta| > 1+|\xi|\}$ yli kasvaa korkeintaan vauhtia $\mathcal{O}((1+|\xi|)^{-1})$. Tällöin integraali (4.102) voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta + \mathcal{O}((1+|\xi|)^{-1}) \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \psi_k\Big((x-y)q(\xi), \frac{\xi-\eta}{q(\xi)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha \\
&\quad + \langle\nabla q(\xi), \frac{\eta-\xi}{q(\xi)}\rangle\psi_k'\Big((x-y)q(\xi), \frac{\xi-\eta}{q(\xi)}\Big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta + \mathcal{O}((1+|\xi|)^{-1}) \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \psi_k(y',\eta')y'^\beta\eta'^\alpha q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|}
\end{aligned}$$

$$
+ \langle \nabla q(\xi), \eta' \rangle \psi_k'(y', \eta') y'^\beta \eta'^\alpha q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \, dy' d\eta' + \mathcal{O}((1+|\xi|)^{-1})
$$
$$
= q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \psi_k(y,\eta) y^\beta \eta^\alpha + \langle \nabla q(\xi), \eta \rangle \psi_k'(y,\eta) y^\beta \eta^\alpha \, dy d\eta + \mathcal{O}((1+|\xi|)^{-1}).
$$

On siis osoitettu, että

$$
\iint_{2|\xi-\eta|<1+|\xi|} \psi_k\Big((x-y)q(\eta), \frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\Big)(y-x)^\beta (\eta-\xi)^\alpha \, dy d\eta \tag{4.106}
$$
$$
= q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \psi_k(y,\eta) y^\beta \eta^\alpha + \langle \nabla q(\xi), \eta \rangle \psi_k'(y,\eta) y^\beta \eta^\alpha \, dy d\eta + \mathcal{O}((1+|\xi|)^{-1}).
$$

Tähän on hyvä pysähtyä hetkeksi. Käsillä on nyt kolme erilaista tilannetta johtuen summasta kaavassa (4.101) multi-indeksien α ja β suhteen. Multi-indeksit voivat muodostua seuraavilla tavoilla: $|\alpha+\beta| = 2$, $|\alpha+\beta| = 1$ ja $|\alpha+\beta| = 0$. Kaikki nämä tapaukset johtavat hieman eri tyyppiseen ratkaisumalliin.

Mikäli $|\alpha+\beta| = 2$, juuri laskettu integraali (4.106) on rajoitettu. Integraali koostuu kahdesta Schwartzin funktiosta, joita on kerrottu näiden funktioiden argumenteista muodostetuilla polynomeilla. Integraali on siten äärellinen ja yläraja on yksinkertaisesti $Cq(\xi)^{|\alpha|-|\beta|}$, missä vakio $C > 0$ ei riipu muuttujasta ξ.

Tapauksen $|\alpha+\beta| = 1$ kannalta on tärkeää huomata, että funktion $\psi_k(y,\eta)$ parillisuus johtaa siihen, että

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta) y_j \, dy_j = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta) \eta_j \, d\eta_j = 0.
$$

Tästä nähdään, että mikäli $|\alpha+\beta| = 1$, niin integraalissa (4.106) ensimmäinen termi häviää. Mikäli tässä tilanteessa oletetaan lisäksi, että $|\beta| = 1$ ($|\alpha| = 0$) niin myös toinen termi häviää. Toisaalta jos oletetaan, että $|\alpha| = 1$, jolloin tietenkin $|\beta| = 0$, niin saadaan, että

$$
\Big| q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla q(\xi), \eta \rangle \psi_k'(y,\eta) y^\beta \eta^\alpha \, dy d\eta \Big|
$$
$$
= \Big| q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \Big(\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k'(y,\eta) \eta_j \, dy d\eta + \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_{j'}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k'(y,\eta) \eta_{j'}^2 \, dy d\eta
$$
$$
+ \sum_{j=j+1}^{n} \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k'(y,\eta) \eta_j \, dy d\eta \Big) \Big|
$$

$$\leq Cq(\xi)^{|\alpha|-|\beta|}\Big|\frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_{j'}}\Big| \leq Cq(\xi)^{|\alpha|-|\beta|-1},$$

missä vakio $C > 0$ ei riipu muuttujasta ξ. Näin ollen tilanteessa $|\alpha+\beta| = 1$ integraali on rajoitettu funktiolla $Cq(\xi)^{|\alpha|-|\beta|-1}$. Tässä tapauksessa $Cq(\xi)^{|\alpha|-|\beta|-1} = Cq(\xi)^{2|\alpha|-2}$. Yhtä lailla, tilanteessa $|\alpha+\beta| = 2$ ylärajaksi voidaan merkitä $Cq(\xi)^{2|\alpha|-2}$, sillä tällöin $Cq(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} = Cq(\xi)^{2|\alpha|-2}$. Nämä tulokset selviävät helposti laskemalla. Näin ollen, tapauksissa $|\alpha+\beta| = 2$ ja $|\alpha+\beta| = 1$ yläraja on $Cq(\xi)^{2|\alpha|-2}$.

Tapauksessa $|\alpha+\beta| = 0$ saadaan integraaliksi,

$$\begin{aligned} q(\xi)^{|\alpha|-|\beta|}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)y^\beta\eta^\alpha + \langle\nabla q(\xi),\eta\rangle\psi_k'(y,\eta)y^\beta\eta^\alpha\, dyd\eta \\ = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\, dyd\eta). \end{aligned}$$

Näin ollen kaikki tapaukset multi-indeksien α ja β suhteen johtivat mielekkääseen lopputulokseen.

Muistetaan, että nyt ollaan ratkaisemassa estimaattia integraalille (4.101) ja nähdään, että integraalia (4.106) kerrotaan termeillä $b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)/\alpha!\beta!$ ja multi-indekseissä toisistaan eroavat termit summataan yhteen. Edeltävän perusteella voidaan arvioida, että

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2\\ |\alpha+\beta|\neq 0}} \frac{1}{\alpha!\beta!}b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\iint_{|\xi-\eta|<\frac{1+|\xi|}{2}} \psi_k\big((\xi-\eta)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta\Big| \\ &\leq \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2\\ |\alpha+\beta|\neq 0}} C|b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)|q(\xi)|^{2|\alpha|-2}. \end{aligned}$$

Symbolin q määritelmän 4.3.6 ja oletuksen $b_k(x,\xi) \in S^\mu$ nojalla voidaan laskea, että

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2\\ |\alpha+\beta|\neq 0}} C|b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)|q(\xi)|^{2|\alpha|-2} \\ &\leq C\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2\\ |\alpha+\beta|\neq 0}} (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-|\alpha|)}|(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}} \\ &\leq C'\langle\xi\rangle^{\mu-1}. \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan estimaatti,

$$\Big|\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2\\ |\alpha+\beta|\neq 0}} \frac{1}{\alpha!\beta!}b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\iint_{|\xi-\eta|<\frac{1+|\xi|}{2}} \psi_k\big((\xi-\eta)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha\, dyd\eta\Big|$$

$$\leq C'\langle\xi\rangle^{\mu-1}. \tag{4.107}$$

□

Nyt voidaan muotoilla lemmaksi termien c_k estimointi.

Lemma 4.3.22. Olkoon symboli c_k määritelty kuten lemmassa 4.3.16, eli

$$c_k(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k\big((x-y)q(\eta),(\xi-\eta)/q(\eta)\big)b_k(y,\eta)\,dyd\eta - b_k(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi_k(y,\eta)\,dyd\eta, \tag{4.108}$$

missä $\psi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ on parillinen funktio ja $b_k \in S^\mu$, missä $\mu \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa $C > 0$ siten, että

$$|c_k(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{\mu-1}. \tag{4.109}$$

Huomautus 4.110. Ainoana erona lemman 4.3.16 määrittelyyn, juuri esityssä lemmassa symbolin b_k luokan astetta merkitään nyt hieman toisella tavalla.

Todistus. Symbolia c_k voidaan arvioida siten, että

$$\begin{aligned}
|c_k(x,\xi)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k\big((x-y)q(\eta),(\xi-\eta)/q(\eta)\big)b_k(y,\eta)\,dyd\eta - b_k(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi_k(y,\eta)\,dyd\eta\Big| \\
&= \Big| \iint_{|\xi-\eta|\geq\frac{1+|\xi|}{2}} \psi_k\big((\xi-\eta)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\big)b_k(y,\eta)\,dyd\eta \\
&\quad + \iint_{|\xi-\eta|<\frac{1+|\xi|}{2}} \psi_k\big((\xi-\eta)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\big)B_k(x,y,\xi,\eta)\,dyd\eta \\
&\quad + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2\\|\alpha+\beta|\neq 0}} \frac{1}{\alpha!\beta!}b_{k,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\iint_{|\xi-\eta|<\frac{1+|\xi|}{2}}\psi_k\big((\xi-\eta)q(\eta),\frac{\xi-\eta}{q(\eta)}\big)(y-x)^\beta(\eta-\xi)^\alpha dyd\eta \\
&\quad + b_k(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi_k(y,\eta)\,dyd\eta - b_k(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi_k(y,\eta)\,dyd\eta\Big|,
\end{aligned}$$

jolloin lemmojen 4.3.17, 4.3.20 ja 4.3.21 perusteella on olemassa positiiviset vakiot C_1, C_2, C_3 ja C_4 siten, että

$$\begin{aligned}
|c_k(x,\xi)| &\leq C_1(1+|\xi|)^{\mu-1} + C_2(1+|\xi|)^{\mu-3/2} + C_3\langle\xi\rangle^{\mu-1} \\
&\leq C_4(1+|\xi|)^{\mu-1}.
\end{aligned}$$

Näin ollen on osoitettu, että väite pätee.

□

Edellisestä lemmasta saadaan ilmeinen seurauslause.

Lause 4.3.23. Funktio a_0 on symboli, jolle pätee $a_0 \in S^{2m}$.

Todistus. Olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^l$ multi-indeksejä, missä $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Lemman 4.3.16 nojalla funktion a_0 osittaisderivaatta $a_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)$ voidaan esittää äärellisenä summana termeistä $c_k(x,\xi)$. Termit c_k on määritelty siten, että
(4.111)

$$c_k(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k\big((x-y)q(\eta), (\xi-\eta)/q(\eta)\big) b_k(y,\eta)\, dyd\eta - b_k(x,\xi) \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y,\eta)\, dyd\eta,$$

missä $b(x,\xi) \in S^{2m+1-|\alpha|}$. Lemman 4.3.22 nojalla pätee, että $|c_k(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{2m-|\alpha|}$, missä $C > 0$. Tällöin kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ ja $C, C' > 0$ siten, että

$$|a_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)| = \Big|\sum_{k=0}^{N} c_k(x,\xi)\Big| \leq \sum_{k=0}^{N} C(1+|\xi|)^{2m-|\alpha|} \leq C'(1+|\xi|)^{2m-|\alpha|}.$$

Tämä tarkoittaa määritelmän 2.1.1 nojalla sitä, että $a_0 \in S^{2m}$.

□

Tästä saadaan ilmeinen seurauslause.

Korollaari 4.112. *Tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa symbolin $a_0(x,\xi)$ määräämälle pseudodifferentiaalioperaattorille.*

Todistus. Lauseen 4.3.23 nojalla $a_0 \in S^{2m}$. Tällöin lemman 4.3.2 nojalla tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) pätee symbolin $a_0(x,\xi)$ määräämälle pseudodifferentiaalioperaattorille.

□

Tästä seuraa, että tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa symbolille, jonka symbolit a_0 ja a_1 määräävät.

Korollaari 4.113. *Jos $a(x,\xi) \in S^{2m+1}$ ja $a(x,\xi) \geq 0$, niin tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa pseudodifferentiaalioperaattorille $a(x,D)$.*

Todistus. Symboli $a(x,\xi)$ voidaan hajottaa kahden symbolin summaksi määritelmien 4.3.8 ja 4.3.9 avulla siten, että

$$a(x,\xi) = a_0(x,\xi) + a_1(x,\xi). \tag{4.114}$$

Tällöin lauseen 4.3.10 ja korollaarin 4.112 nojalla tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa pseudodifferentiaalioperaattoreille $a_0(x,D)$ ja $a_1(x,D)$. Tällöin lineaarisuuden nojalla tarkka Gårdingin epäyhtälö on voimassa myös pseudodifferentiaalioperaattorille $a(x,D)$.

□

Tämän avulla voidaan lopulta todistaa lause nimeltä tarkka Gårdingin epäyhtälö, lause 4.3.1. Erona edelliseen korollaariin on, että edellisessä korollaarissa symbolin oletettiin olevan ei-negatiivinen, kun taas lauseessa 4.3.1 oletetaan, että ainostaan symbolin reaaliosa on ei-negatiivinen.

Todistus. (Todistus lauseelle 4.3.1) Oletetaan että $a \in S^{2m+1}$ ja että $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$. Voidaan laskea, että

$$\operatorname{Re}(a(x,D)u,u) = \Big((\frac{1}{2}a(x,D) + \frac{1}{2}a^*(x,D) - (\operatorname{Re} a))u, u \Big) + \Big((\operatorname{Re} a)u, u \Big). \tag{4.115}$$

Korollaarin 4.63 nojalla tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa operaattorille

$$\frac{1}{2}a(x,D) + \frac{1}{2}a^*(x,D) - (\operatorname{Re} a)(x,D). \tag{4.116}$$

Näin ollen ratkaistavaksi jää, operaattorin $\big(\operatorname{Re} a\big)(x,D)$ vaikutus. Lauseen oletusten perusteella $\operatorname{Re} a(x,\xi) \in S^{2m+1}$ ja $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$. Tällöin korollaarin 4.113 nojalla tarkka Gårdingin epäyhtälö (4.59) on voimassa operaattorille $(\operatorname{Re} a)(x,D)$. Lineaarisuuden nojalla (4.59) on voimassa myös pseudodifferentiaalioperaattorille $a(x,D)$ ja täten lause 4.3.1 on todistettu.

$\square$

Tarkka Gårdingin epäyhtälö päättää luvun 4. Seuraavassa luvussa tarkastellaan evoluutioyhtälöä, jossa voidaan soveltaa tarkkaa Gårdingin epäyhtälöä.

Luku 5

Evoluutioyhtälö

Tässä luvussa sovelletaan tarkkaa Gårdingin epäyhtälöä evoluutioyhtälöön [1] Evoluutioyhtälö on nimitys ajasta riippuvaisille differentiaali- ja osittaisdifferentiaaliyhtälöille. Nimi kuvaa, että systeemi muuttuu ajan kuluessa. Evoluutioyhtälö voidaan muotoilla esimerkiksi seuraavasti. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ paikkamuuttuja, $t \geq 0$ aikamuuttuja ja L osittaisdifferentiaalioperaattori, joka riippuu x muuttujasta.

$$\partial_t u(x,t) = Lu(x,t) \tag{5.1}$$

Joukko eri tyyppisiä yhtälöitä saadaan sen mukaan miten operaattori L määrätään. Tälläinen määrittely johtaa tietysti siihen, että evoluutioyhtälöt kattavat erittäin laajan joukon differentiaali ja osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Esimerkiksi lämpöyhtälö

$$\partial_t u = \alpha \Delta u \tag{5.2}$$

on evoluutioyhtälö, sillä sen ratkaisu kehittyy ajan mukaan. Evans on myös käsitellyt evoluutioyhtälöitä kirjansa [2] kappaleessa 7. Kappaleessa 7.1 käsitellään lämpöyhtälön kaltaisia toisen asteen parabolisia yhtälöitä ja kappaleessa 7.2 aaltoyhtälön kaltaisia toisen asteen hyperbolisia yhtälöitä. Evoluutioyhtälöistä voi lukea myös esimerkiksi Walkerin kirjasta [25]. Evoluutioyhtälöt ovat edelleen aktiivinen tutkimuskohde.

Tässä luvussa tarkasteltava evoluutioyhtälö on seuraavanlainen ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö. Olkoon $a(x,D)$ pseudodifferentiaalioperaattori, joka kuuluu luokkaan $S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ja jonka symbolin reaaliosa on ei-negatiivinen $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$ ja olkoon $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Systeemi on

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + a(x,D)u(x,t) = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t > 0\}, \\ u(x,0) = f(x), & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5.3}$$

[1] Toinen lukijaa mahdollisesti kiinnostava esimerkki tarkan Gårdingin epäyhtälön soveltamisesta esitetään artikkelissa [3].

Kaavoista nähdään, että funktio f määrää ratkaisun käytöksen ajanhetkellä nolla ja että systeemin kehitys ajan suhteen on sidottu pseudodifferentiaalioperaattoriin $a(x, D)$. Ratkaisun $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ oletetaan olevan sileä funktio, joka on Schwartzin funktio silloin kun aikamuuttuja t on kiinnitetty.

Tavoitteena on osoittaa, että systeemin ratkaisulle voidaan löytää aikaestimaatti. Aikaestimaatilla tarkoitetaan vakiota $C > 0$, joka on yläraja systeemin ratkaisulle u siten, että

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C. \tag{5.4}$$

Tällaisella aikaestimaatilla voi tietysti olla monenlaista käyttöä, mutta yksi tapa jolla tällaista aikaestimaattia voidaan hyödyntää on esitetty Evansin kirjassa [2] kappaleessa 7 sivuilla 377-381. Siinä on esitetty kuinka tämän kaltaisella aikaestimaatilla voidaan todistaa heikkojen ratkaisujen olemassaolo osittaisdifferentiaaliyhtälölle.

Aikaestimaattia varten tarvitaan tarkan Gårdingin epäyhtälön lisäksi toinenkin apulause, jota kutsutaan Gronwallin epäyhtälön differentiaalimuodoksi. Tämän lauseen lähteenä on käytetty Evansin kirjaa [2], josta sen löytää todistuksineen liitteessä B.

Lause 5.0.1 (Gronwallin epäyhtälö)**.** Olkoon $\eta(t)$ ei-negatiivinen ja absoluuttisesti jatkuva funktio välillä $[0, T]$. Oletetaan, että $\eta(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\eta'(t) = \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \tag{5.5}$$

missä $\phi(t)$ ja $\psi(t)$ ovat ei-negatiivisia ja kompakteilla joukoilla integroituvia funktioita välillä $[0, T]$. Tällöin

$$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right) \tag{5.6}$$

kaikilla $0 \le t \le T$.

Todistus. Käyttäen analyysin peruslausetta, kaavasta (5.6) nähdään, että

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\big(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\big) &= e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\big(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)\big) \\ &\le e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\big(\phi(s)\eta(s) + \psi(s) - \phi(s)\eta(s)\big) \\ &= \psi(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \end{aligned} \tag{5.7}$$

melkein kaikilla $0 \le s \le T$. Näin ollen kaavan (5.8) nojalla kaikilla $t \in [0, T]$ pätee, että

$$\int_0^s \frac{d}{ds}\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}ds \le \int_0^s \psi(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}ds \le \int_0^t \psi(s)ds. \tag{5.8}$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että ϕ on positiivinen funktio, jolloin $e^{-\int_0^s \phi(r)dr}$ on pienempi kuin yksi kaikilla $s > 0$. Toisaalta tiedetään myös, että

$$\int_0^s \frac{d}{ds}\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}ds = \eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr} - \eta(0). \tag{5.9}$$

Yhdistämällä kaavat (5.9) ja (5.8) saadaan, että

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr} \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds, \tag{5.10}$$

josta kertomalla yhtälöä $e^{-\int_0^s \phi(r)dr}$:llä saadaan

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right),$$

mikä onkin lauseen väite. Gronwallin epäyhtälö on siten todistettu.

□

Muotoillaan sitten lauseeksi tämän luvun esimerkki tarkan Gårdingin epäyhtälön soveltamisesta.

Lause 5.0.2. Kaikilla $T > 0$ on olemassa vakio $C > 0$ siten, että evoluutioyhtälön (5.18) ratkaisulle $u(x,t)$ on olemassa aikaestimaatti

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq e^{2CT}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.11}$$

Todistus. Kun oletetaan, että evoluutioyhtälön ratkaisu $u(x,\cdot)$ on Schwartzin funktio muuttujan x suhteen, niin voidaan soveltaa tarkkaa Gårdingin epäyhtälöä aikaestimaatin muodostamisessa. Oletetaan siis, että u on evoluutioyhtälön (5.18) ratkaisu. Kun evoluutioyhtälöä kerrotaan funktiolla u saadaan, että

$$\Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big) + \Big(a(x,D)u(x,t), u(x,t)\Big) = 0, \tag{5.12}$$

missä $(,)$ on avaruuden $L^2(\mathbb{R}^n)$ sisätulo. Estimaatissa (5.11) oleva u:n L^2-normi saadaan ensimmäisestä sisätulosta. Aloitetaan derivoimalla muuttujan t funktiota $\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

$$\begin{aligned}\partial_t\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \partial_t\Big(u(x,t), u(x,t)\Big) = \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\overline{u(x,t)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(x,t)\overline{u(x,t)}dx + \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\partial_t\overline{u(x,t)}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big) + \Big(u(x,t), \partial_t u(x,t)\Big) \\
&= \Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big) + \overline{\Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big)} \\
&= 2\operatorname{Re}\Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big).
\end{aligned}
$$

Ylläolevan nojalla saadaan yhtäsuuruus

$$
\frac{1}{2}\partial_t \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{Re}\Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big). \tag{5.13}
$$

Kaavasta (5.12) seuraa, että

$$
\operatorname{Re}\Big(\partial_t u(x,t), u(x,t)\Big) = -\operatorname{Re}\Big(a(x,D)u(x,t), u(x,t)\Big). \tag{5.14}
$$

Yhdistämällä tulokset (5.13) ja (5.14) saadaan

$$
\frac{1}{2}\partial_t \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = -\operatorname{Re}\Big(a(x,D)u(x,t), u(x,t)\Big). \tag{5.15}
$$

Koska $a \in S^1$ ja $\operatorname{Re} a(x,\xi) \geq 0$, niin tarkan Gårdingin epäyhtälön, lause 4.3.1, nojalla on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$
\operatorname{Re}\Big(a(x,D)u(\cdot,t), u(\cdot,t)\Big) \geq -C\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.16}
$$

Näin ollen yhtälöstä (5.15) ja epäyhtälöstä (5.16) seuraa, että

$$
\frac{1}{2}\partial_t \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.17}
$$

Gårdingin epäyhtälön avulla pääteltiin, että ratkaisun L^2-normin muutos ajansuhteen on pienempi kuin ratkaisun L^2-normi kerrottuna vakiolla C. Jotta päästäisiin lauseen väitteeseen, on vielä Gronwallin epäyhtälöä käyttäen muutettava tämä ratkaisun L^2-normi halutuksi estimaatiksi. Käyttäen apuna kaavaa (5.17), Gronwallin epäyhtälössä esiintyvät funktiot voidaan valita seuraavasti:

$$
\begin{cases}
\phi(t) = 2C \\
\eta(t) = \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
\psi(t) = 0.
\end{cases} \tag{5.18}
$$

Valitut funktiot ovat selvästi positiivisia ja lokaalisti integroituvia välillä $[0,T]$. Osoitetaan että valittu $\eta(t)$ on absoluuttisesti jatkuva funktio. Tätä varten osoitetaan, että η

on Lipschitz funktio, tästä seuraa että funktio on myös absoluuttisesti jatkuva. Olkoon $(a,b) \subset [0,T]$. Tällöin saadaan että

$$\begin{aligned}
|\eta(b) - \eta(a)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,b)|^2 - |u(x,a)|^2 dx \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t u(x,t)(b-a) + u(x,a)|^2 - |u(x,a)|^2 dx \Big| \\
&= \Big| (b-a) \int_{\mathbb{R}^n} \big(a(x,D)u(x,t)\big)^2 |(b-a)| + |a(x,D)u(x,t)| dx \Big| \\
&\leq C|b-a|.
\end{aligned}$$

Näin ollen funktio on Lipschitz ja siten myös absoluuttisesti jatkuva. Valituilla funktioilla Gronwallin epäyhtälö muodostuu siten, että

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \exp\Big(\int_0^t 2C ds \Big) \big(\|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 0 \big) \leq e^{2CT} \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.19}$$

Evoluutioyhtälö (5.18) on määritelty siten, että ajanhetkellä $t = 0$, $u(x,0) = f(x)$, joten epäyhtälöstä (5.19) seuraa, että

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq e^{2CT} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.20}$$

Koska yläraja (5.20) ei riipu aikamuuttujasta t, niin normi $\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ on rajoitettu samalla ylärajalla kaikilla $t \in [0,T]$.

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq e^{2CT} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.21}$$

Tulos (5.21) onkin lauseen väite ja lause on siten todistettu.

$\square$

Päätetään tämä luku ja samalla koko työ tähän. Toivottavasti lukija on viihtynyt lukiessaan tätä esitystä ja ehkä oppinut jotain pseudodifferentiaalioperaattoreista. Tässä esityksessä ei tietenkään ehditty kuin raapaista hieman pintaa isosta kokonaisuudesta, mutta kuten sanottua, kaiken kattavan teorian esittäminen ei ole tämän työn tarkoitus. Tämän työn päätavoitteena oli esitellä luvun 3 lauseet pseudodifferentiaalioperaattoreiden tulolle ja adjungaatille ja luvun 4 Gårdingin epäyhtälö ja tarkka Gårdingin epäyhtälö.

Liite A

Käytetyt merkinnät

Kun $x \in \mathbb{R}^n$, niin $\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$ missä $|x|^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2$.

Kun osittaisderivointia merkitään isolla D kirjaimella, niin osittaisderivointiin sisältyy kertominen kompleksiluvulla $-i$,

$$D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Multi-indeksillä $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ja vektorilla $x \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$.

Osittaisderivointiin liittyen käytetään notaatiota $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi) = p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)$.

$C^m(\Omega)$ on m kertaa jatkuvasti Ω:ssa differentoituvien funktioiden muodostama joukko.

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$ ja $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$.

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on ns. Schwartzin avaruus, eli nopeasti vähenevien funktioiden avaruus.

Schwartz-avaruuden seminormi on

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_x \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right|.$$

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ on Schwartzin avaruuden duaaliavaruus.

$\mathscr{F}$ on Fourier-muunnos.

$\mathscr{F}^{-1}$ on käänteis-Fourier-muunnos.

S^m on pseudodifferentiaalioperaattorin symboliluokka.

H^m on luokan m Sobolev-avaruus.

$B(x_0, r)$ on pisteen $x_0 \in \mathbb{R}^n$, r-säteinen kuulaympäristö. $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$.

Kirjallisuus

[1] Ola Bratteli et al. "Unitary representations of Lie groups and Gårding's Inequality". *Proceedings of the American Mathematical Society* 107.3 (1989), s. 627–632. DOI: 10.2307/2048158.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. 2. painos. American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3.

[3] Charles Fefferman ja Duong H. Phong. "The uncertainty principle and sharp Gårding inequality". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 34 (1981), s. 285–331.

[4] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*. Princeton University Press, 1989. ISBN: 0-691-08527-7.

[5] K.O. Friedrichs. *Pseudo-Differential Operators. An Introduction, Lecture Notes*. Courant Inst. Math. Sci., New York, 1968(revised 1970).

[6] Gerd Grubb. *Distributions and operators*. Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-84895-2.

[7] L. Gårding. "Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations". *Mathematica Scandinavica* 1 (1953), s. 55–72.

[8] Lars Gårding. *Levnadsbeskrivning*. URL: http://www.maths.lth.se/matematiklth/personal/andersk/Garding.pdf. (Vierailtu: 01.09.2018).

[9] Ilkka Holopainen. *Mitta ja integraali*. URL: http://www.helsinki.fi/~iholopai/MitInt02.pdf. (Vierailtu: 01.09.2018).

[10] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Springer. ISBN: 978-3-540-49937-4.

[11] Lars Valter Hörmander. "Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems". *Annals of Mathematics* 4 (1966), s. 129–209.

[12] Lars Valter Hörmander. "The weyl calculus of pseudo-differential operators". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 32 (1979), s. 359–443.

[13] Hitoshi Kumano-go. *Pseudo-differential Operators*. The MIT Press, 1981. ISBN: 0-262-11080-6.

[14] P.D. Lax ja L. Nirenberg. "On stability for difference schemes: a sharp form of Gårding's inequality". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 19 (1966), s. 473–492.

[15] Olli Martio. *Vektorianalyysi*. Limes ry. ISBN: 9789517452182.

[16] Nikolai Nowaczyk. *Introduction to Partial Differential Operators*. URL: `https://nikno.de/wp-content/uploads/2016/07/pdo.pdf`. (Vierailtu: 12.3.2019).

[17] Michael Ruzhansky ja Ville Turunen. "Sharp Gårding inequality on compact Lie groups". *Journal of Functional Analysis* 260 (2011), s. 2881–2901. DOI: `10.1016/j.jfa.2011.02.014`.

[18] Mikko Salo. *Fourier analysis and distribution theory, Luentomuistiinpanot, syksy 2013*. URL: `http://users.jyu.fi/~salomi/lecturenotes/FA_distributions.pdf`. (Vierailtu: 01.09.2018).

[19] Elias M. Stein ja Rami Shakarchi. *Fourier analysis, an introduction*. Princeton University Press, 2003. ISBN: 978-0-691-11384-5.

[20] Robert S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. CRC Press, 1994. ISBN: 0-8493-8273-4.

[21] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations I basic theory*. 2. painos. Springer, 1997. ISBN: 0-387-94651-9.

[22] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations II, Qualitative studies of linear equations*. 2. painos. Springer, 1997. ISBN: 0-387-94651-9.

[23] Francois Treves. *Introduction to pseudodifferential and fourier integral operators*. Vol. 1. Springer, 1980. ISBN: 978-1-4684-8782-4.

[24] R. Vaillancourt. "A simple proof of Lax–Nirenberg theorems". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 23 (1970), s. 151–163.

[25] John Andrew Walker. *Dynamical systems and evolution equations*. 1. painos. Plenum press, 1980. ISBN: 978-1-4684-1038-9.

[26] Hermann Weyl. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Leipzig, S. Hirzel, 1931.

[27] Man Wah Wong. *An introduction to pseudo-differential operators*. 2. painos. World Scientific Publishing Company, 1999. ISBN: 9810238134.